A

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

2º Appello — 4 luglio 2016

Esercizio 1. Sia $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $w \in V$ tale che $w \notin \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\rangle$. Dimostrare che i vettori $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, w\}$ sono una base di V.

Esercizio 2. Sia A una matrice $m \times n$ e siano P, Q matrici quadrate invertibili di ordine m ed n rispettivamente. Mostrare che $\text{rango}(PAQ) = \text{rango}(A)$.

Esercizio 3. Siano λ_1, λ_2 (con $\lambda_1 \neq \lambda_2$) autovalori di una matrice A e siano v_1 un autovettore associato a λ_1 e v_2 un autovettore associato a λ_2. Dimostrare che i vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 4. Assegnati i vettori $p = (1, 3, 3, 2)$, $w_1 = (2, 0, 3, 1)$, $w_2 = (1, -1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$, indichiamo con W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da w_1 e w_2.

(a) Si determini se $p \in W$ e si dica se l'insieme $\{p + a_1w_1 + a_2w_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ coincide con W.

(b) Determinare le equazioni cartesiane del sottospazio W.

(c) Sia $U_t \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $(1, 2, -1, 0)$ e $(-1, t, 3, 2)$. Determinare per quale valore di t è $U_t \cap W \neq \{0\}$.

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita da $f(x, y, z) = (3x + y + 5z, -2x + 4y - z)$.

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$, trovare una base di $\text{Ker}(f)$ e una base di $\text{Im}(f)$.

(b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{w_1 = (2, 1), w_2 = (1, -3)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

(c) Trovare basi di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$ tali che, rispetto a tali basi, la matrice di f sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. È possibile trovare delle basi in modo che la matrice sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$?

Esercizio 6. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quale valore di t la matrice A ha un autovalore nullo.

(b) Determinare per quale valore di t il vettore $v = (1, -1, -2)$ è un autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(c) Per il valore di t trovato nel punto (b) si determinino gli autovalori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ sia π il piano passante per i punti $A = (2, 0, 1, -1)$, $B = (3, 1, 1, 1)$ e $C = (2, 2, 0, 0)$.

(a) Scrivere le equazioni (parametriche o cartesiane) di π.

(b) Trovare la proiezione ortogonale P' del punto $P = (7, 3, -3, 3)$ sul piano π, ovvero, il punto $P' \in \pi$ di minima distanza da P.

(c) Dato il punto $Q = (3, 2, 1, 0)$, scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e Q.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

2º Appello — 4 luglio 2016

Esercizio 1. Sia $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $w \in V$ tale che $w \notin \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\rangle$. Dimostrare che i vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w\}$ sono una base di V.

Esercizio 2. Sia A una matrice $m \times n$ e siano P, Q matrici quadrate invertibili di ordine m ed n rispettivamente. Mostrare che $\text{rango}(PAQ) = \text{rango}(A)$.

Esercizio 3. Siano λ_1, λ_2 (con $\lambda_1 \neq \lambda_2$) autovalori di una matrice A e siano v_1 un autovettore associato a λ_1 e v_2 un autovettore associato a λ_2. Dimostrare che i vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 4. Assegnati i vettori $p = (-1, 1, -2, -3)$, $w_1 = (1, 3, 0, -1)$, $w_2 = (2, 4, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$, indichiamo con W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da w_1 e w_2.

(a) Si determini se $p \in W$ e si dica se l'insieme $\{p + a_1w_1 + a_2w_2 \,|\, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ coincide con W.

(b) Determinare le equazioni cartesiane del sottospazio W.

(c) Sia $U_t \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $(2, 1, 0, 1)$ e $(1, t, 1, -2)$. Determinare per quale valore di t è $U_t \cap W \neq \{0\}$.

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita da $f(x, y, z) = (4x - y - z, -x - 2y - 5z)$.

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$, trovare una base di $\text{Ker}(f)$ e una base di $\text{Im}(f)$.

(b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{w_1 = (1, -1), w_2 = (2, 1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

(c) Trovare basi di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$ tali che, rispetto a tali basi, la matrice di f sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. È possibile trovare delle basi in modo che la matrice sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$?

Esercizio 6. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ t & -1 & -4 \\ -4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quale valore di t la matrice A ha un autovalore nullo.

(b) Determinare per quale valore di t il vettore $v = (2, 1, -2)$ è un autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(c) Per il valore di t trovato nel punto (b) si determinino gli autovalori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ sia π il piano passante per i punti $A = (3, -1, 0, 2)$, $B = (3, 1, 1, 1)$ e $C = (4, -2, 2, 2)$.

(a) Scrivere le equazioni (parametriche o cartesiane) di π.

(b) Trovare la proiezione ortogonale P' del punto $P = (4, 4, -4, 2)$ sul piano π, ovvero, il punto $P' \in \pi$ di minima distanza da P.

(c) Dato il punto $Q = (5, -1, 1, 1)$, scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e Q.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

2^o Appello — 4 luglio 2016

Esercizio 1. Sia $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $w \in V$ tale che $w \notin \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\rangle$. Dimostrare che i vettori $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, w\}$ sono una base di V.

Esercizio 2. Sia A una matrice $m \times n$ e siano P, Q matrici quadrate invertibili di ordine m ed n rispettivamente. Mostrare che $\mathrm{rango}(PAQ) = \mathrm{rango}(A)$.

Esercizio 3. Siano λ_1, λ_2 (con $\lambda_1 \neq \lambda_2$) autovalori di una matrice A e siano v_1 un autovettore associato a λ_1 e v_2 un autovettore associato a λ_2. Dimostrare che i vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 4. Assegnati i vettori $p = (2, 3, 3, 2)$, $w_1 = (4, 3, -1, 0)$, $w_2 = (1, 0, -2, -1) \in \mathbb{R}^4$, indichiamo con W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da w_1 e w_2.

(a) Si determini se $p \in W$ e si dica se l'insieme $\{p + a_1w_1 + a_2w_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ coincide con W.

(b) Determinare le equazioni cartesiane del sottospazio W.

(c) Sia $U_t \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $(1, 0, 2, 1)$ e $(4, t, -5, -2)$. Determinare per quale valore di t è $U_t \cap W \neq \{0\}$.

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita da $f(x, y, z) = (2x + 4y - 5z, -5x + y + 7z)$.

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$, trovare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{w_1 = (1, 3), w_2 = (3, -2)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

(c) Trovare basi di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$ tali che, rispetto a tali basi, la matrice di f sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. È possibile trovare delle basi in modo che la matrice sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$?

Esercizio 6. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -10 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quale valore di t la matrice A ha un autovalore nullo.

(b) Determinare per quale valore di t il vettore $v = (2, -1, -1)$ è un autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(c) Per il valore di t trovato nel punto (b) si determinino gli autovalori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ sia π il piano passante per i punti $A = (0, 2, -2, 1)$, $B = (2, 1, -3, 1)$ e $C = (1, 3, -2, 3)$.

(a) Scrivere le equazioni (parametriche o cartesiane) di π.

(b) Trovare la proiezione ortogonale P' del punto $P = (4, 0, -3, -2)$ sul piano π, ovvero, il punto $P' \in \pi$ di minima distanza da P.

(c) Dato il punto $Q = (1, 0, -4, 0)$, scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e Q.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

2° Appello — 4 luglio 2016

Esercizio 1. Sia $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $w \in V$ tale che $w \notin \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\rangle$. Dimostrare che i vettori $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, w\}$ sono una base di V.

Esercizio 2. Sia A una matrice $m \times n$ e siano P, Q matrici quadrate invertibili di ordine m ed n rispettivamente. Mostrare che $\text{rango}(PAQ) = \text{rango}(A)$.

Esercizio 3. Siano λ_1, λ_2 (con $\lambda_1 \neq \lambda_2$) autovalori di una matrice A e siano v_1 un autovettore associato a λ_1 e v_2 un autovettore associato a λ_2. Dimostrare che i vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

Esercizio 4. Assegnati i vettori $p = (1, 1, 3, -2)$, $w_1 = (0, 2, 1, -1)$, $w_2 = (-1, 5, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$, indichiamo con W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da w_1 e w_2.

(a) Si determini se $p \in W$ e si dica se l'insieme $\{p + a_1w_1 + a_2w_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ coincide con W.

(b) Determinare le equazioni cartesiane del sottospazio W.

(c) Sia $U_t \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $(2, 0, -1, 1)$ e $(1, t, -3, 2)$. Determinare per quale valore di t è $U_t \cap W \neq \{0\}$.

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita da $f(x, y, z) = (5x + 3y + 2z, 4x - 2y - 5z)$.

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$, trovare una base di $\text{Ker}(f)$ e una base di $\text{Im}(f)$.

(b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{w_1 = (4, 1), w_2 = (1, 3)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

(c) Trovare basi di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$ tali che, rispetto a tali basi, la matrice di f sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. È possibile trovare delle basi in modo che la matrice sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$?

Esercizio 6. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 6 & -4 & 6 \\ 4 & t & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quale valore di t la matrice A ha un autovalore nullo.

(b) Determinare per quale valore di t il vettore $v = (-2, 2, 3)$ è un autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(c) Per il valore di t trovato nel punto (b) si determinino gli autovalori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ sia π il piano passante per i punti $A = (3, -2, 1, 0)$, $B = (2, -2, 3, 1)$ e $C = (3, 0, 3, -1)$.

(a) Scrivere le equazioni (parametriche o cartesiane) di π.

(b) Trovare la proiezione ortogonale P' del punto $P = (5, -4, 4, 5)$ sul piano π, ovvero, il punto $P' \in \pi$ di minima distanza da P.

(c) Dato il punto $Q = (5, -1, 2, 2)$, scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e Q.