A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, G. GEROTTO, R. KLOOSTERMAN

3$^{\text{o}}$ Appello — 5 settembre 2016

Esercizio 1. Siano V uno spazio vettoriale e U_1, U_2 sottospazi di V tali che $U_1 \oplus U_2 = V$. Dimostrare che ogni vettore di V si può scrivere *in modo unico* come somma di un vettore $u_1 \in U_1$ e un vettore $u_2 \in U_2$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare **iniettiva**. Si dimostri che esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità. È possibile che esista una funzione $h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $f \circ h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sia l'identità?

Esercizio 3. Sia $f\colon V \to V$ una funzione lineare e siano A e A' due matrici (simili) che rappresentano f, rispetto a due basi diverse di V. Sappiamo che A e A' hanno gli stessi autovalori, in quanto questi sono gli autovalori della funzione f. È corretto affermare che pertanto A e A' devono avere anche gli stessi autovettori, in quanto questi sono gli autovettori della funzione f? [*La risposta deve essere adeguatamente giustificata*].

Esercizio 4. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 1, 3, -1)$ e $u_2 = (1, 2, -1, 4)$.

(a) Verificare che il vettore $u = (5, 1, 10, -7)$ appartiene a U e trovare le coordinate di u rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$ di U.

(b) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0$. Verificare che $U \subset V$ e completare la base $\{u_1, u_2\}$ di U ad una base di V.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 - x_3 + 2x_4 = 0$. Trovare una base di $V \cap W$ e di $V + W$. È possibile trovare un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $W = U \oplus L$?

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da $f(x, y, z) = (2x - y, -x + 3y + z, x + 2y + z)$.

(a) Stabilire se f è iniettiva e dire per quale valore di t il vettore $(4, 3, t)$ appartiene all'immagine di f.

(b) Calcolare gli autovalori di f.

(c) Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$.

(a) Si determini l'insieme S di tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ la cui proiezione ortogonale su W è uguale al vettore $(1, 3, 1, 1)$. Si dica se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

(b) Determinare una base ortogonale di W.

(c) Dato $v = (1, 3, 5, -2)$, determinare un vettore $w \in W$ di norma minima tale che $v + w \in W^\perp$.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si consideri il piano $\pi_\alpha : \alpha x + 2y - 2\alpha z + 4 = 0$ e la retta

$$s : \begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica se esiste una retta contenuta in tutti i piani π_α (per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$). Se tale retta esiste se ne scrivano le equazioni (cartesiane o parametriche).

(b) Determinare per quale valore di α la retta s è parallela al piano π_α e per quale valore di α la retta s è perpendicolare a π_α.

(c) Si ponga ora $\alpha = 1$. Si determini il punto P' simmetrico di $P = (2, 3, -3)$ rispetto al piano π_1.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

3º Appello — 5 settembre 2016

Esercizio 1. Siano V uno spazio vettoriale e U_1, U_2 sottospazi di V tali che $U_1 \oplus U_2 = V$. Dimostrare che ogni vettore di V si può scrivere *in modo unico* come somma di un vettore $u_1 \in U_1$ e un vettore $u_2 \in U_2$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare **iniettiva**. Si dimostri che esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità. È possibile che esista una funzione $h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $f \circ h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sia l'identità?

Esercizio 3. Sia $f\colon V \to V$ una funzione lineare e siano A e A' due matrici (simili) che rappresentano f, rispetto a due basi diverse di V. Sappiamo che A e A' hanno gli stessi autovalori, in quanto questi sono gli autovalori della funzione f. È corretto affermare che pertanto A e A' devono avere anche gli stessi autovettori, in quanto questi sono gli autovettori della funzione f ? [*La risposta deve essere adeguatamente giustificata*].

Esercizio 4. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -1, 2, 3)$ e $u_2 = (2, 2, 2, -1)$.

(a) Verificare che il vettore $u = (4, 8, 2, -9)$ appartiene a U e trovare le coordinate di u rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$ di U.

(b) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$. Verificare che $U \subset V$ e completare la base $\{u_1, u_2\}$ di U ad una base di V.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$. Trovare una base di $V \cap W$ e di $V + W$. È possibile trovare un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $W = U \oplus L$?

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da $f(x, y, z) = (3x - 2z, -2x + y - z, x + y - 3z)$.

(a) Stabilire se f è iniettiva e dire per quale valore di t il vettore $(4, t, -1)$ appartiene all'immagine di f.

(b) Calcolare gli autovalori di f.

(c) Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $3x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0$.

(a) Si determini l'insieme S di tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ la cui proiezione ortogonale su W è uguale al vettore $(1, 1, 2, 1)$. Si dica se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

(b) Determinare una base ortogonale di W.

(c) Dato $v = (1, 5, -4, -2)$, determinare un vettore $w \in W$ di norma minima tale che $v + w \in W^{\perp}$.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si consideri il piano $\pi_\alpha : 2x - \alpha y + 3\alpha z - 2 = 0$ e la retta

$$s : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 3x + z - 8 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica se esiste una retta contenuta in tutti i piani π_α (per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$). Se tale retta esiste se ne scrivano le equazioni (cartesiane o parametriche).

(b) Determinare per quale valore di α la retta s è parallela al piano π_α e per quale valore di α la retta s è perpendicolare a π_α.

(c) Si ponga ora $\alpha = 1$. Si determini il punto P' simmetrico di $P = (5, -5, 5)$ rispetto al piano π_1.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

3^o Appello — 5 settembre 2016

Esercizio 1. Siano V uno spazio vettoriale e U_1, U_2 sottospazi di V tali che $U_1 \oplus U_2 = V$. Dimostrare che ogni vettore di V si può scrivere *in modo unico* come somma di un vettore $u_1 \in U_1$ e un vettore $u_2 \in U_2$.

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare **iniettiva**. Si dimostri che esiste una funzione lineare $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità. È possibile che esista una funzione $h: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $f \circ h: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sia l'identità?

Esercizio 3. Sia $f: V \to V$ una funzione lineare e siano A e A' due matrici (simili) che rappresentano f, rispetto a due basi diverse di V. Sappiamo che A e A' hanno gli stessi autovalori, in quanto questi sono gli autovalori della funzione f. È corretto affermare che pertanto A e A' devono avere anche gli stessi autovettori, in quanto questi sono gli autovettori della funzione f? [*La risposta deve essere adeguatamente giustificata*].

Esercizio 4. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (-1, 3, 5, 1)$ e $u_2 = (2, -1, 2, 2)$.

(a) Verificare che il vettore $u = (-7, 6, -1, -5)$ appartiene a U e trovare le coordinate di u rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$ di U.

(b) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x_1 + x_3 - 3x_4 = 0$. Verificare che $U \subset V$ e completare la base $\{u_1, u_2\}$ di U ad una base di V.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$. Trovare una base di $V \cap W$ e di $V + W$. È possibile trovare un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $W = U \oplus L$?

Esercizio 5. Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da $f(x, y, z) = (2y - 3z, x - y + z, x + y - 2z)$.

(a) Stabilire se f è iniettiva e dire per quale valore di t il vettore $(3, t, 1)$ appartiene all'immagine di f.

(b) Calcolare gli autovalori di f.

(c) Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$.

(a) Si determini l'insieme S di tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ la cui proiezione ortogonale su W è uguale al vettore $(3, 1, -1, 1)$. Si dica se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

(b) Determinare una base ortogonale di W.

(c) Dato $v = (8, 0, 4, -1)$, determinare un vettore $w \in W$ di norma minima tale che $v + w \in W^\perp$.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si consideri il piano $\pi_\alpha : 2\alpha x - \alpha y + 3z - 2 = 0$ e la retta

$$s : \begin{cases} x - 2z + 5 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica se esiste una retta contenuta in tutti i piani π_α (per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$). Se tale retta esiste se ne scrivano le equazioni (cartesiane o parametriche).

(b) Determinare per quale valore di α la retta s è parallela al piano π_α e per quale valore di α la retta s è perpendicolare a π_α.

(c) Si ponga ora $\alpha = 1$. Si determini il punto P' simmetrico di $P = (6, -3, 5)$ rispetto al piano π_1.

D

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

3$^{\text{o}}$ Appello — 5 settembre 2016

Esercizio 1. Siano V uno spazio vettoriale e U_1, U_2 sottospazi di V tali che $U_1 \oplus U_2 = V$. Dimostrare che ogni vettore di V si può scrivere *in modo unico* come somma di un vettore $u_1 \in U_1$ e un vettore $u_2 \in U_2$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare **iniettiva**. Si dimostri che esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità. È possibile che esista una funzione $h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $f \circ h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sia l'identità?

Esercizio 3. Sia $f\colon V \to V$ una funzione lineare e siano A e A' due matrici (simili) che rappresentano f, rispetto a due basi diverse di V. Sappiamo che A e A' hanno gli stessi autovalori, in quanto questi sono gli autovalori della funzione f. È corretto affermare che pertanto A e A' devono avere anche gli stessi autovettori, in quanto questi sono gli autovettori della funzione f? [*La risposta deve essere adeguatamente giustificata*].

Esercizio 4. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3, -1, 2, 1)$ e $u_2 = (-1, 2, -4, -2)$.

(a) Verificare che il vettore $u = (3, 4, -8, -4)$ appartiene a U e trovare le coordinate di u rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$ di U.

(b) Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0$. Verificare che $U \subset V$ e completare la base $\{u_1, u_2\}$ di U ad una base di V.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $3x_1 - x_2 + x_4 = 0$. Trovare una base di $V \cap W$ e di $V + W$. È possibile trovare un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $W = U \oplus L$?

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da $f(x, y, z) = (x - y + 3z, 2y - z, x + y + 2z)$.

(a) Stabilire se f è iniettiva e dire per quale valore di t il vettore $(3, t, 7)$ appartiene all'immagine di f.

(b) Calcolare gli autovalori di f.

(c) Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$.

(a) Si determini l'insieme S di tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ la cui proiezione ortogonale su W è uguale al vettore $(1, 2, 2, 1)$. Si dica se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

(b) Determinare una base ortogonale di W.

(c) Dato $v = (1, 3, -4, -2)$, determinare un vettore $w \in W$ di norma minima tale che $v + w \in W^\perp$.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si consideri il piano $\pi_\alpha : x - \alpha y + 3\alpha z - 1 = 0$ e la retta

$$s : \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica se esiste una retta contenuta in tutti i piani π_α (per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$). Se tale retta esiste se ne scrivano le equazioni (cartesiane o parametriche).

(b) Determinare per quale valore di α la retta s è parallela al piano π_α e per quale valore di α la retta s è perpendicolare a π_α.

(c) Si ponga ora $\alpha = 1$. Si determini il punto P' simmetrico di $P = (-7, 4, -7)$ rispetto al piano π_1.