A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

1º Appello — 14 giugno 2017

Esercizio 1. Siano V e W due spazi vettoriali su un campo K. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ vettori linearmente indipendenti. Dimostrare che, comunque si scelgano dei vettori $w_1, w_2, \ldots, w_r \in W$, esiste una funzione lineare $f\colon V \to W$ tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2, \ldots, f(v_r) = w_r$. Se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono anche un sistema di generatori, una tale funzione f è unica.

Esercizio 2. Si dimostri che due matrici simili hanno lo stesso determinante. Si dia poi un esempio esplicito di due matrici che hanno lo stesso determinante ma non sono simili (spiegando perché non sono simili).

Esercizio 3. Sia A una matrice reale $m \times n$. Mostrare che, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e ogni $w \in \mathbb{R}^m$, si ha $(Av) \cdot w = v \cdot (A^T w)$.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $v_1 = (3, -3, -4, 3)$, $v_2 = (2, 0, -1, 1)$, $v_3 = (4, 6, 3, -1)$, $v_4 = (1, 3, 2, -1)$.

(a) Determinare le relazioni di dipendenza lineare tra i vettori assegnati e una base del sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

(b) Determinare per quale valore di t il vettore $w = (4, -6, t, 5)$ appartiene al sottospazio V.

(c) Determinare una base di un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. È possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e anche $V \oplus W = \mathbb{R}^4$?

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare data da $f(x, y, z) = (x + 4y - 2z, 3x + 2y - 2z)$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1, 1), (1, -1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

(b) Trovare una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ in modo che la matrice di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1, 1), (1, -1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

(c) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità?

Esiste una funzione lineare $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sia l'identità? [*le risposte devono essere adeguatamente giustificate*]

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 1, 0, 1)$, $u_2 = (2, 0, -1, 1)$.

(a) Scrivere la matrice del prodotto scalare nel sottospazio U, rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$.

(b) Trovare una base di U rispetto alla quale la matrice del prodotto scalare sia diagonale.

(c) Dato il vettore $v = (4, -1, 2, 3) \in \mathbb{R}^4$, determinare la sua proiezione ortogonale su U.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il punto $P = (1, -1, -1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + 7y - 16 = 0 \\ 4y - z - 8 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente il punto P e la retta r.

(b) Determinare il punto $P' \in \pi$, simmetrico di P rispetto alla retta r.

(c) Sulla retta passante per P e ortogonale al piano π determinare due punti A e B in modo tale che i due triangoli APP' e BPP' abbiano ciascuno area $= 2\sqrt{66}$.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

1^o Appello — 14 giugno 2017

Esercizio 1. Siano V e W due spazi vettoriali su un campo K. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ vettori linearmente indipendenti. Dimostrare che, comunque si scelgano dei vettori $w_1, w_2, \ldots, w_r \in W$, esiste una funzione lineare $f\colon V \to W$ tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $\ldots$, $f(v_r) = w_r$. Se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono anche un sistema di generatori, una tale funzione f è unica.

Esercizio 2. Si dimostri che due matrici simili hanno lo stesso determinante. Si dia poi un esempio esplicito di due matrici che hanno lo stesso determinante ma non sono simili (spiegando perché non sono simili).

Esercizio 3. Sia A una matrice reale $m \times n$. Mostrare che, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e ogni $w \in \mathbb{R}^m$, si ha $(Av) \cdot w = v \cdot (A^T w)$.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $v_1 = (-3, 1, -4, 0)$, $v_2 = (2, 1, 2, -1)$, $v_3 = (-4, 3, -6, -1)$, $v_4 = (1, 3, 0, -2)$.

(a) Determinare le relazioni di dipendenza lineare tra i vettori assegnati e una base del sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

(b) Determinare per quale valore di t il vettore $w = (4, 7, 2, t)$ appartiene al sottospazio V.

(c) Determinare una base di un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. È possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e anche $V \oplus W = \mathbb{R}^4$?

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare data da $f(x, y, z) = (7x - 3y, 2x + 3y - 3z)$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(2, 1), (1, -1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

(b) Trovare una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ in modo che la matrice di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(2, 1), (1, -1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

(c) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità?

Esiste una funzione lineare $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sia l'identità? [*le risposte devono essere adeguatamente giustificate*]

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, -1)$.

(a) Scrivere la matrice del prodotto scalare nel sottospazio U, rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$.

(b) Trovare una base di U rispetto alla quale la matrice del prodotto scalare sia diagonale.

(c) Dato il vettore $v = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, determinare la sua proiezione ortogonale su U.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il punto $P = (2, -2, 1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} 5x - y + 5 = 0 \\ 7x - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente il punto P e la retta r.

(b) Determinare il punto $P' \in \pi$, simmetrico di P rispetto alla retta r.

(c) Sulla retta passante per P e ortogonale al piano π determinare due punti A e B in modo tale che i due triangoli APP' e BPP' abbiano ciascuno area $= 6\sqrt{17}$.

C

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

1º Appello — 14 giugno 2017

Esercizio 1. Siano V e W due spazi vettoriali su un campo K. Siano $v_1, v_2, \dots, v_r \in V$ vettori linearmente indipendenti. Dimostrare che, comunque si scelgano dei vettori $w_1, w_2, \dots, w_r \in W$, esiste una funzione lineare $f\colon V \to W$ tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $\dots$, $f(v_r) = w_r$. Se i vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$ sono anche un sistema di generatori, una tale funzione f è unica.

Esercizio 2. Si dimostri che due matrici simili hanno lo stesso determinante. Si dia poi un esempio esplicito di due matrici che hanno lo stesso determinante ma non sono simili (spiegando perché non sono simili).

Esercizio 3. Sia A una matrice reale $m \times n$. Mostrare che, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e ogni $w \in \mathbb{R}^m$, si ha $(Av) \cdot w = v \cdot (A^T w)$.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $v_1 = (0, 5, -5, -3)$, $v_2 = (-1, -3, 3, 2)$, $v_3 = (3, -1, 1, 0)$, $v_4 = (1, -2, 2, 1)$.

(a) Determinare le relazioni di dipendenza lineare tra i vettori assegnati e una base del sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

(b) Determinare per quale valore di t il vettore $w = (7, -9, 9, t)$ appartiene al sottospazio V.

(c) Determinare una base di un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. È possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e anche $V \oplus W = \mathbb{R}^4$?

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare data da $f(x, y, z) = (5x - 2y + 3z, 4x - 4y)$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1, 2), (2, 1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

(b) Trovare una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ in modo che la matrice di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1, 2), (2, 1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

(c) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità?

Esiste una funzione lineare $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sia l'identità? [*le risposte devono essere adeguatamente giustificate*]

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (0, 1, 1, -1)$, $u_2 = (1, 0, 2, -1)$.

(a) Scrivere la matrice del prodotto scalare nel sottospazio U, rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$.

(b) Trovare una base di U rispetto alla quale la matrice del prodotto scalare sia diagonale.

(c) Dato il vettore $v = (1, 1, 6, -2) \in \mathbb{R}^4$, determinare la sua proiezione ortogonale su U.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il punto $P = (1, 3, -2)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x - 3y + z - 1 = 0 \\ 4y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente il punto P e la retta r.

(b) Determinare il punto $P' \in \pi$, simmetrico di P rispetto alla retta r.

(c) Sulla retta passante per P e ortogonale al piano π determinare due punti A e B in modo tale che i due triangoli APP' e BPP' abbiano ciascuno area $= 3\sqrt{66}$.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

1º Appello — 14 giugno 2017

Esercizio 1. Siano V e W due spazi vettoriali su un campo K. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ vettori linearmente indipendenti. Dimostrare che, comunque si scelgano dei vettori $w_1, w_2, \ldots, w_r \in W$, esiste una funzione lineare $f\colon V \to W$ tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $\ldots$, $f(v_r) = w_r$. Se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono anche un sistema di generatori, una tale funzione f è unica.

Esercizio 2. Si dimostri che due matrici simili hanno lo stesso determinante. Si dia poi un esempio esplicito di due matrici che hanno lo stesso determinante ma non sono simili (spiegando perché non sono simili).

Esercizio 3. Sia A una matrice reale $m \times n$. Mostrare che, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e ogni $w \in \mathbb{R}^m$, si ha $(Av) \cdot w = v \cdot (A^T w)$.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $v_1 = (3,1,1,2)$, $v_2 = (2,-1,0,2)$, $v_3 = (-1,8,3,-4)$, $v_4 = (-1,3,1,-2)$.

(a) Determinare le relazioni di dipendenza lineare tra i vettori assegnati e una base del sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

(b) Determinare per quale valore di t il vettore $w = (4,3,t,2)$ appartiene al sottospazio V.

(c) Determinare una base di un sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. È possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e anche $V \oplus W = \mathbb{R}^4$?

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare data da $f(x,y,z) = (5x+y+z, -4x-8y+z)$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1,1),(1,-2)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

(b) Trovare una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ in modo che la matrice di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{(1,1),(1,-2)\}$ di $\mathbb{R}^2$ sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

(c) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità?

Esiste una funzione lineare $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sia l'identità? [*le risposte devono essere adeguatamente giustificate*]

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1,1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1,1)$.

(a) Scrivere la matrice del prodotto scalare nel sottospazio U, rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$.

(b) Trovare una base di U rispetto alla quale la matrice del prodotto scalare sia diagonale.

(c) Dato il vettore $v = (0,2,-3,2) \in \mathbb{R}^4$, determinare la sua proiezione ortogonale su U.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il punto $P = (3,-1,2)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + 4z + 3 = 0 \\ y - 5z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente il punto P e la retta r.

(b) Determinare il punto $P' \in \pi$, simmetrico di P rispetto alla retta r.

(c) Sulla retta passante per P e ortogonale al piano π determinare due punti A e B in modo tale che i due triangoli APP' e BPP' abbiano ciascuno area $= 3\sqrt{42}$.