A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

2º Appello — 4 luglio 2017

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale, $U_1, \ldots, U_r$ sottospazi vettoriali non nulli e distinti, tali che $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \cdots \subsetneq U_r$. Mostrare che $\dim V \geq r$.

Esercizio 2. Sia $f\colon V \to W$ una funzione lineare **iniettiva** tra due spazi vettoriali. Dimostrare che se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti allora anche le loro immagini $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo lineare tale che $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$. Mostrare che $f \circ f$ è la funzione nulla. Chi sono gli autovalori di una tale f?

Esercizio 4. Indichiamo con $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $A_k = \begin{pmatrix} 2k-5 & -2 \\ 1-k & k+1 \end{pmatrix}$ e poniamo $S = \{A_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Osserviamo che l'insieme S non è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

(a) Determinare per quale valore di $k \in \mathbb{Z}$ la matrice A_k non ha rango 2.

(b) Determinare la dimensione e una base del più piccolo sottospazio U di $M_2(\mathbb{R})$ che contiene S.

(c) Sia $V \subset M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale formato da tutte le matrici simmetriche. Scrivere una base di $U \cap V$.

Esercizio 5. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ t & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quali valori di t tutti gli autovalori di A_t sono reali.

(b) Si ponga ora $t = 3$. Determinare gli autovalori e gli autospazi della matrice A_3 e stabilire se essa è diagonalizzabile.

(c) Si dica se A_3 è simile alla matrice $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (la risposta deve essere adeguatamente giustificata).

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -1, 0, 2)$, $u_2 = (0, 2, 1, -1)$ e sia L il sottospazio generato dal vettore $\ell = (-1, 1, -1, 1)$.

(a) Si dica se $L \subseteq U^\perp$ e poi si determini una base di $(U + L)^\perp$.

(b) Dato il vettore $w = (3, 1, 4, -2)$ si determini il vettore v di norma minima tale che $v + w \in L$.

(c) Si dica se esiste un sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale del vettore w su W sia $w' = (2, -1, 4, 1)$ [*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*].

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il punto $P = (2, 1, 5)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + 2y + 2z - 5 = 0 \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r e passante per il punto P.

(b) Dato il piano $\sigma : 2x - z + 1 = 0$, determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto $A = r \cap \sigma$, contenuta nel piano σ e ortogonale alla retta r.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta r', simmetrica di r rispetto al piano σ.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

2º Appello — 4 luglio 2017

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale, $U_1, \ldots, U_r$ sottospazi vettoriali non nulli e distinti, tali che $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \cdots \subsetneq U_r$. Mostrare che $\dim V \geq r$.

Esercizio 2. Sia $f\colon V \to W$ una funzione lineare **iniettiva** tra due spazi vettoriali. Dimostrare che se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti allora anche le loro immagini $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo lineare tale che $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Mostrare che $f \circ f$ è la funzione nulla. Chi sono gli autovalori di una tale f?

Esercizio 4. Indichiamo con $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $A_k = \left(\begin{smallmatrix} 2k-1 & -1 \\ k+4 & 2k-6 \end{smallmatrix}\right)$ e poniamo $S = \{A_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Osserviamo che l'insieme S non è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

(a) Determinare per quale valore di $k \in \mathbb{Z}$ la matrice A_k non ha rango 2.

(b) Determinare la dimensione e una base del più piccolo sottospazio U di $M_2(\mathbb{R})$ che contiene S.

(c) Sia $V \subset M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale formato da tutte le matrici simmetriche. Scrivere una base di $U \cap V$.

Esercizio 5. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ t & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quali valori di t tutti gli autovalori di A_t sono reali.

(b) Si ponga ora $t = -2$. Determinare gli autovalori e gli autospazi della matrice A_{-2} e stabilire se essa è diagonalizzabile.

(c) Si dica se A_{-2} è simile alla matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (la risposta deve essere adeguatamente giustificata).

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 0, 2, -1)$, $u_2 = (1, -1, -2, 0)$ e sia L il sottospazio generato dal vettore $\ell = (1, 1, 0, 2)$.

(a) Si dica se $L \subseteq U^\perp$ e poi si determini una base di $(U + L)^\perp$.

(b) Dato il vettore $w = (1, -1, 1, -6)$ si determini il vettore v di norma minima tale che $v + w \in L$.

(c) Si dica se esiste un sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale del vettore w su W sia $w' = (2, -3, -1, -6)$ [*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*].

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il punto $P = (1, 3, -3)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r e passante per il punto P.

(b) Dato il piano $\sigma : x + 2y + 1 = 0$ determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto $A = r \cap \sigma$, contenuta nel piano σ e ortogonale alla retta r.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta r', simmetrica di r rispetto al piano σ.

C

Cognome ____________ Nome ____________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

2^o Appello — 4 luglio 2017

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale, $U_1, \ldots, U_r$ sottospazi vettoriali non nulli e distinti, tali che $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \cdots \subsetneq U_r$. Mostrare che $\dim V \geq r$.

Esercizio 2. Sia $f\colon V \to W$ una funzione lineare **iniettiva** tra due spazi vettoriali. Dimostrare che se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti allora anche le loro immagini $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo lineare tale che $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Mostrare che $f \circ f$ è la funzione nulla. Chi sono gli autovalori di una tale f?

Esercizio 4. Indichiamo con $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $A_k = \left(\begin{smallmatrix} k+3 & 1 \\ 3-k & 2k+4 \end{smallmatrix}\right)$ e poniamo $S = \{A_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Osserviamo che l'insieme S non è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

(a) Determinare per quale valore di $k \in \mathbb{Z}$ la matrice A_k non ha rango 2.

(b) Determinare la dimensione e una base del più piccolo sottospazio U di $M_2(\mathbb{R})$ che contiene S.

(c) Sia $V \subset M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale formato da tutte le matrici simmetriche. Scrivere una base di $U \cap V$.

Esercizio 5. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -7 & t & -4 \\ 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quali valori di t tutti gli autovalori di A_t sono reali.

(b) Si ponga ora $t = -4$. Determinare gli autovalori e gli autospazi della matrice A_{-4} e stabilire se essa è diagonalizzabile.

(c) Si dica se A_{-4} è simile alla matrice $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ (la risposta deve essere adeguatamente giustificata).

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3, 0, -1, 1)$, $u_2 = (2, 1, 0, -2)$ e sia L il sottospazio generato dal vettore $\ell = (0, 2, 1, 1)$.

(a) Si dica se $L \subseteq U^\perp$ e poi si determini una base di $(U + L)^\perp$.

(b) Dato il vettore $w = (-1, 2, 5, 3)$ si determini il vettore v di norma minima tale che $v + w \in L$.

(c) Si dica se esiste un sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale del vettore w su W sia $w' = (-3, 1, 5, -1)$ [*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*].

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il punto $P = (3, -1, 3)$ e la retta

$$r : \begin{cases} 2x + y + z - 3 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r e passante per il punto P.

(b) Dato il piano $\sigma : 2x + z - 5 = 0$ determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto $A = r \cap \sigma$, contenuta nel piano σ e ortogonale alla retta r.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta r', simmetrica di r rispetto al piano σ.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

2º Appello — 4 luglio 2017

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale, $U_1, \dots, U_r$ sottospazi vettoriali non nulli e distinti, tali che $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \cdots \subsetneq U_r$. Mostrare che $\dim V \geq r$.

Esercizio 2. Sia $f\colon V \to W$ una funzione lineare **iniettiva** tra due spazi vettoriali. Dimostrare che se i vettori $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti allora anche le loro immagini $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo lineare tale che $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Mostrare che $f \circ f$ è la funzione nulla. Chi sono gli autovalori di una tale f?

Esercizio 4. Indichiamo con $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $A_k = \left(\begin{smallmatrix} 2k+5 & 3 \\ k+4 & 2-2k \end{smallmatrix}\right)$ e poniamo $S = \{A_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Osserviamo che l'insieme S non è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

(a) Determinare per quale valore di $k \in \mathbb{Z}$ la matrice A_k non ha rango 2.

(b) Determinare la dimensione e una base del più piccolo sottospazio U di $M_2(\mathbb{R})$ che contiene S.

(c) Sia $V \subset M_2(\mathbb{R})$ il sottospazio vettoriale formato da tutte le matrici simmetriche. Scrivere una base di $U \cap V$.

Esercizio 5. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & t & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quali valori di t tutti gli autovalori di A_t sono reali.

(b) Si ponga ora $t = -6$. Determinare gli autovalori e gli autospazi della matrice A_{-6} e stabilire se essa è diagonalizzabile.

(c) Si dica se A_{-6} è simile alla matrice $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ (la risposta deve essere adeguatamente giustificata).

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (-2, 1, 2, 0)$, $u_2 = (3, 0, -1, 1)$ e sia L il sottospazio generato dal vettore $\ell = (1, 0, 1, -2)$.

(a) Si dica se $L \subseteq U^\perp$ e poi si determini una base di $(U + L)^\perp$.

(b) Dato il vettore $w = (2, -3, 4, -3)$ si determini il vettore v di norma minima tale che $v + w \in L$.

(c) Si dica se esiste un sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale del vettore w su W sia $w' = (1, 1, 4, -2)$ [*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*].

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il punto $P = (3, 2, 4)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale alla retta r e passante per il punto P.

(b) Dato il piano $\sigma : x + 3y + 1 = 0$ determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto $A = r \cap \sigma$, contenuta nel piano σ e ortogonale alla retta r.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta r', simmetrica di r rispetto al piano σ.