A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, G. GEROTTO, R. KLOOSTERMAN

3º Appello — 5 settembre 2017

Esercizio 1. Supponiamo che i vettori v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{R}^3$ siano linearmente indipendenti e che, al contrario, i vettori w_1, w_2, $w_3 \in \mathbb{R}^3$ siano linearmente dipendenti. Esiste un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = w_3$?
Quale sarebbe la risposta se invece i vettori v_1, v_2, v_3 fossero linearmente dipendenti e i vettori w_1, w_2, w_3 fossero linearmente indipendenti?

Esercizio 2. Esiste una matrice simmetrica 2×2 che abbia autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$ e autovettori $v_1 = (1, -2)$ e $v_2 = (3, 1)$?

Esercizio 3. Dato un numero reale a, sia $A = a\,I$, ove I è la matrice identica. Dimostrare che se una matrice B è simile ad A allora deve necessariamente essere $B = A$.

Esercizio 4. Sia $V_t \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni $x_1 - 2x_3 - 3x_4 = 0$ e $-2x_1 + tx_3 + 6x_4 = 0$.

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione e una base di V_t.

(b) Si dica se è possibile trovare un sottospazio vettoriale non nullo $W \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con V_t, per ogni t. Se un tale sottospazio W esiste se ne trovi una base.

(c) Si ponga ora $t = 0$. Si scriva la matrice (rispetto alle basi canoniche) di un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \langle e_1, e_2 \rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = V_0$.

Esercizio 5. (a) Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo il cui polinomio caratteristico è $x^2(x + 2)$.
Sappiamo inoltre che $\mathrm{Ker}(g)$ è il sottospazio di equazione $2x_1 - x_3 = 0$ e che $v = (1, 1, 4)$ è un autovettore di g relativo all'autovalore $\lambda = -2$. Si scriva la matrice G di g rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determinino una matrice diagonale D e due matrici invertibili P e R tali che $G = PDP^{-1}$ e $G = RDR^{-1}$.
(c) Sia ora $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con lo stesso polinomio caratteristico di g e la cui immagine è generata dai vettori $(1, 0, 1)$ e $(0, 2, -1)$. Con queste informazioni è possibile stabilire se f è diagonalizzabile? Se ciò è possibile si dica se f è diagonalizzabile oppure no.

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia V il sottospazio di equazione $2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0$ e sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -1, 1)$, $u_2 = (2, 1, 0, 1)$.

(a) Determinare una base ortogonale di U.

(b) Determinare una base di un sottospazio $W \subset U^{\perp}$ tale che $V = U \oplus W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (5, 4, -3, t)$, si determini per quale valore di t è possibile scrivere $v_t = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Si trovino inoltre esplicitamente tali vettori u e w.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + z - 5 = 0 \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} x = (3k - 4)t + 1 \\ y = -kt \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

(a) Determinare per quale valore di k le rette r e s_k sono complanari.

(b) Per il valore di k trovato nel punto (a), scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene le rette r e s_k.

(c) Fra tutte le rette passanti per il punto $A = (0, 2, 1)$ e ortogonali al vettore $v = (1, -2, 3)$ trovare quella che ha distanza minima dal punto $B = (5, -1, 2)$ e scriverne le equazioni parametriche.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

3º Appello — 5 settembre 2017

Esercizio 1. Supponiamo che i vettori v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{R}^3$ siano linearmente indipendenti e che, al contrario, i vettori w_1, w_2, $w_3 \in \mathbb{R}^3$ siano linearmente dipendenti. Esiste un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = w_3$?
Quale sarebbe la risposta se invece i vettori v_1, v_2, v_3 fossero linearmente dipendenti e i vettori w_1, w_2, w_3 fossero linearmente indipendenti?

Esercizio 2. Esiste una matrice simmetrica 2×2 che abbia autovalori $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ e autovettori $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (3, -1)$?

Esercizio 3. Dato un numero reale a, sia $A = a\,I$, ove I è la matrice identica. Dimostrare che se una matrice B è simile ad A allora deve necessariamente essere $B = A$.

Esercizio 4. Sia $V_t \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni $3x_1 - x_2 + x_4 = 0$ e $tx_1 + 3x_2 - 3x_4 = 0$.

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione e una base di V_t.

(b) Si dica se è possibile trovare un sottospazio vettoriale non nullo $W \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con V_t, per ogni t. Se un tale sottospazio W esiste se ne trovi una base.

(c) Si ponga ora $t = 0$. Si scriva la matrice (rispetto alle basi canoniche) di un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \langle e_1, e_3 \rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = V_0$.

Esercizio 5. (a) Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo il cui polinomio caratteristico è $x^2(x - 1)$.
Sappiamo inoltre che $\mathrm{Ker}(g)$ è il sottospazio di equazione $x_1 + 3x_2 = 0$ e che $v = (2, -1, -1)$ è un autovettore di g relativo all'autovalore $\lambda = 1$. Si scriva la matrice G di g rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determinino una matrice diagonale D e due matrici invertibili P e R tali che $G = PDP^{-1}$ e $G = RDR^{-1}$.
(c) Sia ora $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con lo stesso polinomio caratteristico di g e la cui immagine è generata dai vettori $(0, 1, 2)$ e $(3, -1, 0)$. Con queste informazioni è possibile stabilire se f è diagonalizzabile? Se ciò è possibile si dica se f è diagonalizzabile oppure no.

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia V il sottospazio di equazione $x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$ e sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 2, 1, 1)$.

(a) Determinare una base ortogonale di U.

(b) Determinare una base di un sottospazio $W \subset U^\perp$ tale che $V = U \oplus W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (0, t, 5, -7)$, si determini per quale valore di t è possibile scrivere $v_t = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Si trovino inoltre esplicitamente tali vettori u e w.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ y - 4z + 11 = 0 \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} x = kt \\ y = (2k + 4)t + 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$$

(a) Determinare per quale valore di k le rette r e s_k sono complanari.

(b) Per il valore di k trovato nel punto (a), scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene le rette r e s_k.

(c) Fra tutte le rette passanti per il punto $A = (1, 1, -1)$ e ortogonali al vettore $v = (3, -1, 2)$ trovare quella che ha distanza minima dal punto $B = (3, 1, 3)$ e scriverne le equazioni parametriche.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

3º Appello — 5 settembre 2017

Esercizio 1. Supponiamo che i vettori v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{R}^3$ siano linearmente indipendenti e che, al contrario, i vettori w_1, w_2, $w_3 \in \mathbb{R}^3$ siano linearmente dipendenti. Esiste un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = w_3$?
Quale sarebbe la risposta se invece i vettori v_1, v_2, v_3 fossero linearmente dipendenti e i vettori w_1, w_2, w_3 fossero linearmente indipendenti?

Esercizio 2. Esiste una matrice simmetrica 2×2 che abbia autovalori $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 5$ e autovettori $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (3, 1)$?

Esercizio 3. Dato un numero reale a, sia $A = a\,I$, ove I è la matrice identica. Dimostrare che se una matrice B è simile ad A allora deve necessariamente essere $B = A$.

Esercizio 4. Sia $V_t \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni $2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$ e $4x_2 + tx_3 - 4x_4 = 0$.

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione e una base di V_t.

(b) Si dica se è possibile trovare un sottospazio vettoriale non nullo $W \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con V_t, per ogni t. Se un tale sottospazio W esiste se ne trovi una base.

(c) Si ponga ora $t = 0$. Si scriva la matrice (rispetto alle basi canoniche) di un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \langle e_1, e_4 \rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = V_0$.

Esercizio 5. (a) Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo il cui polinomio caratteristico è $x^2(x - 3)$.
Sappiamo inoltre che $\mathrm{Ker}(g)$ è il sottospazio di equazione $2x_2+x_3 = 0$ e che $v = (-1, 1, 1)$ è un autovettore di g relativo all'autovalore $\lambda = 3$. Si scriva la matrice G di g rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determinino una matrice diagonale D e due matrici invertibili P e R tali che $G = PDP^{-1}$ e $G = RDR^{-1}$.
(c) Sia ora $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con lo stesso polinomio caratteristico di g e la cui immagine è generata dai vettori $(3, 0, -2)$ e $(0, 1, 1)$. Con queste informazioni è possibile stabilire se f è diagonalizzabile? Se ciò è possibile si dica se f è diagonalizzabile oppure no.

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia V il sottospazio di equazione $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ e sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (0, 1, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, -2, 0)$.

(a) Determinare una base ortogonale di U.

(b) Determinare una base di un sottospazio $W \subset U^\perp$ tale che $V = U \oplus W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (4, t, -5, 3)$, si determini per quale valore di t è possibile scrivere $v_t = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Si trovino inoltre esplicitamente tali vettori u e w.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - 3z + 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} x = (2k - 2)t + 2 \\ y = kt + 1 \\ z = -2t \end{cases}$$

(a) Determinare per quale valore di k le rette r e s_k sono complanari.

(b) Per il valore di k trovato nel punto (a), scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene le rette r e s_k.

(c) Fra tutte le rette passanti per il punto $A = (2, -1, 1)$ e ortogonali al vettore $v = (1, 3, -2)$ trovare quella che ha distanza minima dal punto $B = (2, 3, 0)$ e scriverne le equazioni parametriche.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

3^o Appello — 5 settembre 2017

Esercizio 1. Supponiamo che i vettori v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{R}^3$ siano linearmente indipendenti e che, al contrario, i vettori w_1, w_2, $w_3 \in \mathbb{R}^3$ siano linearmente dipendenti. Esiste un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = w_3$?
Quale sarebbe la risposta se invece i vettori v_1, v_2, v_3 fossero linearmente dipendenti e i vettori w_1, w_2, w_3 fossero linearmente indipendenti?

Esercizio 2. Esiste una matrice simmetrica 2×2 che abbia autovalori $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$ e autovettori $v_1 = (2, -1)$ e $v_2 = (3, 1)$?

Esercizio 3. Dato un numero reale a, sia $A = a\,I$, ove I è la matrice identica. Dimostrare che se una matrice B è simile ad A allora deve necessariamente essere $B = A$.

Esercizio 4. Sia $V_t \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$ e $-6x_1 + 9x_2 + tx_3 = 0$.

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione e una base di V_t.

(b) Si dica se è possibile trovare un sottospazio vettoriale non nullo $W \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con V_t, per ogni t. Se un tale sottospazio W esiste se ne trovi una base.

(c) Si ponga ora $t = 0$. Si scriva la matrice (rispetto alle basi canoniche) di un endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \langle e_2, e_4 \rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = V_0$.

Esercizio 5. (a) Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo il cui polinomio caratteristico è $x^2(x + 1)$.
Sappiamo inoltre che $\mathrm{Ker}(g)$ è il sottospazio di equazione $x_1 + 3x_3 = 0$ e che $v = (2, 3, -1)$ è un autovettore di g relativo all'autovalore $\lambda = -1$. Si scriva la matrice G di g rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determinino una matrice diagonale D e due matrici invertibili P e R tali che $G = PDP^{-1}$ e $G = RDR^{-1}$.

(c) Sia ora $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con lo stesso polinomio caratteristico di g e la cui immagine è generata dai vettori $(0, 2, 1)$ e $(3, -1, 0)$. Con queste informazioni è possibile stabilire se f è diagonalizzabile? Se ciò è possibile si dica se f è diagonalizzabile oppure no.

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia V il sottospazio di equazione $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$ e sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -1, 0, 1)$, $u_2 = (0, -2, 1, 1)$.

(a) Determinare una base ortogonale di U.

(b) Determinare una base di un sottospazio $W \subset U^\perp$ tale che $V = U \oplus W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (4, 0, t, 5)$, si determini per quale valore di t è possibile scrivere $v_t = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Si trovino inoltre esplicitamente tali vettori u e w.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases} \qquad s_k : \begin{cases} x = (3k + 6)t + 3 \\ y = kt \\ z = 3t - 1 \end{cases}$$

(a) Determinare per quale valore di k le rette r e s_k sono complanari.

(b) Per il valore di k trovato nel punto (a), scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene le rette r e s_k.

(c) Fra tutte le rette passanti per il punto $A = (1, 1, -2)$ e ortogonali al vettore $v = (3, -2, -1)$ trovare quella che ha distanza minima dal punto $B = (3, -4, 0)$ e scriverne le equazioni parametriche.