

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, M. IMBESI, S. DI RUZZA

**2° compito — 5 giugno 2018**

**Esercizio 1.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione lineare il cui polinomio caratteristico è  $x(x+2)(x-3)$ . Disponendo solo di questa informazione è possibile determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di  $f$ ? In caso di risposta affermativa quali sono queste dimensioni?

**Esercizio 2.** Siano  $A$  e  $B$  due matrici quadrate di ordine  $n$  tali che  $AB = BA$ . Sia  $v$  un autovettore di  $A$  associato all'autovalore  $\lambda$  e sia  $w = Bv$ . Dimostrare che anche  $w$  è un autovettore di  $A$  associato allo stesso autovalore  $\lambda$ .

**Esercizio 3.** Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & t \\ 2 & 0 & -2 \\ t & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare il valore di  $t$  per cui la matrice  $A_t$  ha un autovalore  $= 0$ .
- (b) Per il valore di  $t$  trovato nel punto (a) determinare gli autovalori e gli autospazi di  $A_t$ .
- (c) Per il valore di  $t$  trovato nel punto (a) determinare, se possibile, una matrice invertibile  $P$  tale che  $P^T A_t P$  sia una matrice diagonale.

**Esercizio 4.** Sia  $U \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio vettoriale generato dai vettori  $u_1 = (2, 0, 1, -1)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0, 3)$ .

- (a) Trovare una base ortogonale di  $U$ .
- (b) Trovare una base di  $U^\perp$ .

**Esercizio 5.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  sono assegnati il piano  $\pi: x + y - z + 1 = 0$  e la retta

$$r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

- (a) Sia  $A = r \cap \pi$ . Scrivere le equazioni parametriche della retta  $s$  passante per il punto  $A$ , contenuta nel piano  $\pi$  e ortogonale alla retta  $r$ .
- (b) Scrivere le equazioni parametriche della retta  $t$  passante per il punto  $B = (1, 1, 0)$ , parallela al piano  $\pi$  e incidente la retta  $r$ .

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, M. IMBESI, S. DI RUZZA

**2° compito — 5 giugno 2018**

**Esercizio 1.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione lineare il cui polinomio caratteristico è  $x(x+3)(x-1)$ . Disponendo solo di questa informazione è possibile determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di  $f$ ? In caso di risposta affermativa quali sono queste dimensioni?

**Esercizio 2.** Siano  $A$  e  $B$  due matrici quadrate di ordine  $n$  tali che  $AB = BA$ . Sia  $v$  un autovettore di  $A$  associato all'autovalore  $\lambda$  e sia  $w = Bv$ . Dimostrare che anche  $w$  è un autovettore di  $A$  associato allo stesso autovalore  $\lambda$ .

**Esercizio 3.** Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ t & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determinare il valore di  $t$  per cui la matrice  $A_t$  ha un autovalore  $= 0$ .
- Per il valore di  $t$  trovato nel punto (a) determinare gli autovalori e gli autospazi di  $A_t$ .
- Per il valore di  $t$  trovato nel punto (a) determinare, se possibile, una matrice invertibile  $P$  tale che  $P^T A_t P$  sia una matrice diagonale.

**Esercizio 4.** Sia  $U \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio vettoriale generato dai vettori  $u_1 = (3, -1, 0, 1)$ ,  $u_2 = (1, 1, 2, 0)$ .

- Trovare una base ortogonale di  $U$ .
- Trovare una base di  $U^\perp$ .

**Esercizio 5.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  sono assegnati il piano  $\pi: x - y + z = 0$  e la retta

$$r: \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

- Sia  $A = r \cap \pi$ . Scrivere le equazioni parametriche della retta  $s$  passante per il punto  $A$ , contenuta nel piano  $\pi$  e ortogonale alla retta  $r$ .
- Scrivere le equazioni parametriche della retta  $t$  passante per il punto  $B = (1, 0, 2)$ , parallela al piano  $\pi$  e incidente la retta  $r$ .

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, M. IMBESI, S. DI RUZZA

**2° compito — 5 giugno 2018**

**Esercizio 1.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione lineare il cui polinomio caratteristico è  $x(x-2)(x+4)$ . Disponendo solo di questa informazione è possibile determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di  $f$ ? In caso di risposta affermativa quali sono queste dimensioni?

**Esercizio 2.** Siano  $A$  e  $B$  due matrici quadrate di ordine  $n$  tali che  $AB = BA$ . Sia  $v$  un autovettore di  $A$  associato all'autovalore  $\lambda$  e sia  $w = Bv$ . Dimostrare che anche  $w$  è un autovettore di  $A$  associato allo stesso autovalore  $\lambda$ .

**Esercizio 3.** Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & t \\ -2 & t & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare il valore di  $t$  per cui la matrice  $A_t$  ha un autovalore  $= 0$ .
- (b) Per il valore di  $t$  trovato nel punto (a) determinare gli autovalori e gli autospazi di  $A_t$ .
- (c) Per il valore di  $t$  trovato nel punto (a) determinare, se possibile, una matrice invertibile  $P$  tale che  $P^T A_t P$  sia una matrice diagonale.

**Esercizio 4.** Sia  $U \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio vettoriale generato dai vettori  $u_1 = (0, 2, -1, 2)$ ,  $u_2 = (1, 2, 0, -1)$ .

- (a) Trovare una base ortogonale di  $U$ .
- (b) Trovare una base di  $U^\perp$ .

**Esercizio 5.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  sono assegnati il piano  $\pi: x - y - z - 1 = 0$  e la retta

$$r: \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

- (a) Sia  $A = r \cap \pi$ . Scrivere le equazioni parametriche della retta  $s$  passante per il punto  $A$ , contenuta nel piano  $\pi$  e ortogonale alla retta  $r$ .
- (b) Scrivere le equazioni parametriche della retta  $t$  passante per il punto  $B = (0, 1, 1)$ , parallela al piano  $\pi$  e incidente la retta  $r$ .

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, M. IMBESI, S. DI RUZZA

**2° compito — 5 giugno 2018**

**Esercizio 1.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione lineare il cui polinomio caratteristico è  $x(x+4)(x-1)$ . Disponendo solo di questa informazione è possibile determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di  $f$ ? In caso di risposta affermativa quali sono queste dimensioni?

**Esercizio 2.** Siano  $A$  e  $B$  due matrici quadrate di ordine  $n$  tali che  $AB = BA$ . Sia  $v$  un autovettore di  $A$  associato all'autovalore  $\lambda$  e sia  $w = Bv$ . Dimostrare che anche  $w$  è un autovettore di  $A$  associato allo stesso autovalore  $\lambda$ .

**Esercizio 3.** Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -2 & t & -4 \\ t & -2 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determinare il valore di  $t$  per cui la matrice  $A_t$  ha un autovalore  $= 0$ .
- Per il valore di  $t$  trovato nel punto (a) determinare gli autovalori e gli autospazi di  $A_t$ .
- Per il valore di  $t$  trovato nel punto (a) determinare, se possibile, una matrice invertibile  $P$  tale che  $P^T A_t P$  sia una matrice diagonale.

**Esercizio 4.** Sia  $U \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio vettoriale generato dai vettori  $u_1 = (2, -2, -1, 0)$ ,  $u_2 = (3, 0, 2, 1)$ .

- Trovare una base ortogonale di  $U$ .
- Trovare una base di  $U^\perp$ .

**Esercizio 5.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  sono assegnati il piano  $\pi: x + y - z = 0$  e la retta

$$r: \begin{cases} 2x - z - 3 = 0 \\ y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

- Sia  $A = r \cap \pi$ . Scrivere le equazioni parametriche della retta  $s$  passante per il punto  $A$ , contenuta nel piano  $\pi$  e ortogonale alla retta  $r$ .
- Scrivere le equazioni parametriche della retta  $t$  passante per il punto  $B = (2, 1, 0)$ , parallela al piano  $\pi$  e incidente la retta  $r$ .