

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

2° compitino — 18 giugno 2019

Esercizio 1. Sia A una matrice invertibile. Dimostrare che se v è un autovettore di A associato all'autovalore λ allora lo stesso vettore v è anche un autovettore di A^{-1} associato all'autovalore $1/\lambda$.

Esercizio 2. Sia A una matrice $n \times n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ un autovettore di A . Sia $w \in \langle v \rangle^\perp$ un vettore ortogonale a v . Dimostrare che anche il vettore $u = A^t w$ è ortogonale a v .

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ t & 2 & 2t \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A .
- Per quale valore di t la matrice A è diagonalizzabile? Per tale valore di t trovare una matrice invertibile P tale che la matrice $P^{-1}AP$ sia diagonale.
- Poniamo ora $t = 1$. Trovare una base di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la matrice di f sia triangolare superiore, con gli autovalori sulla diagonale.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^4 , dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1, 0)$, $u_3 = (0, -2, 0, 1)$.

- Scrivere la matrice G del prodotto scalare nel sottospazio U , rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$.
- Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt trovare una matrice invertibile P tale che $P^t G P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 5. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono date le rette

$$r_{\alpha, \beta} : \begin{cases} x + \alpha y + \alpha z = 2 \\ \beta x + 2y - 2\beta z = -2 \end{cases}$$

- Verificare che le rette $r_{\alpha, \beta}$ ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$) passano tutte per uno stesso punto P (trovare le coordinate di P).
- Poniamo ora $\alpha = 1$. Determinare il valore di β affinché la retta $r_{1, \beta}$ sia parallela al piano $\pi: x + y - z = 1$.

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

2° compito — 18 giugno 2019

Esercizio 1. Sia A una matrice invertibile. Dimostrare che se v è un autovettore di A associato all'autovalore λ allora lo stesso vettore v è anche un autovettore di A^{-1} associato all'autovalore $1/\lambda$.

Esercizio 2. Sia A una matrice $n \times n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ un autovettore di A . Sia $w \in \langle v \rangle^\perp$ un vettore ortogonale a v . Dimostrare che anche il vettore $u = A^t w$ è ortogonale a v .

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2-t & 3 & t \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A .
- (b) Per quale valore di t la matrice A è diagonalizzabile? Per tale valore di t trovare una matrice invertibile P tale che la matrice $P^{-1}AP$ sia diagonale.
- (c) Poniamo ora $t = 1$. Trovare una base di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la matrice di f sia triangolare superiore, con gli autovalori sulla diagonale.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^4 , dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -1, 2)$, $u_2 = (1, 0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1, 2)$.

- (a) Scrivere la matrice G del prodotto scalare nel sottospazio U , rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$.
- (b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt trovare una matrice invertibile P tale che $P^t G P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 5. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono date le rette

$$r_{\alpha, \beta} : \begin{cases} \alpha x + 2y + \alpha z = 2 \\ x + 3\beta y + \beta z = 3 \end{cases}$$

- (a) Verificare che le rette $r_{\alpha, \beta}$ ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$) passano tutte per uno stesso punto P (trovare le coordinate di P).
- (b) Poniamo ora $\alpha = 1$. Determinare il valore di β affinché la retta $r_{1, \beta}$ sia parallela al piano $\pi: 3x - y + z = 1$.

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

2° compito — 18 giugno 2019

Esercizio 1. Sia A una matrice invertibile. Dimostrare che se v è un autovettore di A associato all'autovalore λ allora lo stesso vettore v è anche un autovettore di A^{-1} associato all'autovalore $1/\lambda$.

Esercizio 2. Sia A una matrice $n \times n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ un autovettore di A . Sia $w \in \langle v \rangle^\perp$ un vettore ortogonale a v . Dimostrare che anche il vettore $u = A^t w$ è ortogonale a v .

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ t & -1 & -t \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A .
- (b) Per quale valore di t la matrice A è diagonalizzabile? Per tale valore di t trovare una matrice invertibile P tale che la matrice $P^{-1}AP$ sia diagonale.
- (c) Poniamo ora $t = 1$. Trovare una base di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la matrice di f sia triangolare superiore, con gli autovalori sulla diagonale.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^4 , dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 0, -1)$, $u_3 = (2, 0, -1, 2)$.

- (a) Scrivere la matrice G del prodotto scalare nel sottospazio U , rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$.
- (b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt trovare una matrice invertibile P tale che $P^t G P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 5. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono date le rette

$$r_{\alpha,\beta} : \begin{cases} \alpha x + \alpha y + z = 3 \\ x + 3\beta y + 2\beta z = 2 \end{cases}$$

- (a) Verificare che le rette $r_{\alpha,\beta}$ ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$) passano tutte per uno stesso punto P (trovare le coordinate di P).
- (b) Poniamo ora $\alpha = 1$. Determinare il valore di β affinché la retta $r_{1,\beta}$ sia parallela al piano $\pi: x - 3y - z = 1$.

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

2° compitino — 18 giugno 2019

Esercizio 1. Sia A una matrice invertibile. Dimostrare che se v è un autovettore di A associato all'autovalore λ allora lo stesso vettore v è anche un autovettore di A^{-1} associato all'autovalore $1/\lambda$.

Esercizio 2. Sia A una matrice $n \times n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ un autovettore di A . Sia $w \in \langle v \rangle^\perp$ un vettore ortogonale a v . Dimostrare che anche il vettore $u = A^t w$ è ortogonale a v .

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ -t & -2 & t+3 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A .
- (b) Per quale valore di t la matrice A è diagonalizzabile? Per tale valore di t trovare una matrice invertibile P tale che la matrice $P^{-1}AP$ sia diagonale.
- (c) Poniamo ora $t = 1$. Trovare una base di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la matrice di f sia triangolare superiore, con gli autovalori sulla diagonale.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^4 , dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 2, 0, 1)$, $u_2 = (1, 0, 0, -1)$, $u_3 = (4, 1, 1, 0)$.

- (a) Scrivere la matrice G del prodotto scalare nel sottospazio U , rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$.
- (b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt trovare una matrice invertibile P tale che $P^t G P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 5. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono date le rette

$$r_{\alpha,\beta} : \begin{cases} x + 2\alpha y - \alpha z = 2 \\ \beta x - y - \beta z = -1 \end{cases}$$

- (a) Verificare che le rette $r_{\alpha,\beta}$ ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$) passano tutte per uno stesso punto P (trovare le coordinate di P).
- (b) Poniamo ora $\alpha = 1$. Determinare il valore di β affinché la retta $r_{1,\beta}$ sia parallela al piano $\pi : 2x + 3y - z = 1$.