

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

2° appello — 5 luglio 2019

Esercizio 1. Siano V e W spazi vettoriali reali di dimensioni $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$. Sia $L(V, W)$ lo spazio vettoriale i cui elementi sono le funzioni lineari $f: V \rightarrow W$. Quale è la dimensione di $L(V, W)$?

Fissiamo un vettore $v \in V$ e consideriamo l'insieme di tutte le funzioni lineari $f: V \rightarrow W$ il cui nucleo è generato dal vettore v . Questo insieme è un sottospazio vettoriale di $L(V, W)$?

Esercizio 2. Siano $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ funzioni lineari. Sia $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione data da $h(v) = g(f(v))$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Dimostrare che h ha sempre un autovalore uguale a 0, qualunque siano le funzioni f e g .

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare con le seguenti proprietà: $f(1, 0, 1) = (4, 2, 4)$; il vettore $(1, 0, -1)$ è un generatore dell'autospazio relativo all'autovalore 2; il vettore $(1, 1, 0)$ appartiene al nucleo di f .

- Per quale valore di t il vettore $(t, 1, -1)$ appartiene all'immagine di f ?
- Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
- Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo l'insieme $S = \{(\alpha + 2, -2\beta, 3\alpha - 1, \alpha + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

- Determinare per quale valore di t il vettore $(4, 6, t, -1)$ appartiene a S .
- Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (1, -4, 3, 3)$ e $u_2 = (1, 2, 3, 0)$. Determinare $U \cap S$.
- S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? Se la risposta è negativa determinare una base del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene S .

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, è dato l'endomorfismo f la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Trovare una base ortogonale dell'immagine di f .
- Trovare una base di $(\text{Im } f)^\perp$ e verificare che $(\text{Im } f)^\perp = \text{Ker } f$.
- Dato $v = (12, 1, 1)$ determinare un vettore w di norma minima tale che $v + w \in \text{Ker } f$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo le seguenti rette:

$$r_\alpha : \begin{cases} x - 2\alpha z - 2 + 2\alpha^2 = 0 \\ y - \alpha z + \alpha^2 = 0 \end{cases}$$

- Le rette r_α passano tutte per uno stesso punto? Se sì, determinare tale punto.
- Mostrare che tutte le rette r_α sono contenute nello stesso piano e scrivere l'equazione cartesiana di tale piano.
- Consideriamo il punto $A = (4, 6, 3)$. Determinare il punto H , proiezione ortogonale di A sul piano trovato al punto (b) e, tra tutte le rette r_α , determinare quelle che hanno distanza minima dal punto A .

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

2° appello — 5 luglio 2019

Esercizio 1. Siano V e W spazi vettoriali reali di dimensioni $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$. Sia $L(V, W)$ lo spazio vettoriale i cui elementi sono le funzioni lineari $f: V \rightarrow W$. Quale è la dimensione di $L(V, W)$?

Fissiamo un vettore $v \in V$ e consideriamo l'insieme di tutte le funzioni lineari $f: V \rightarrow W$ il cui nucleo è generato dal vettore v . Questo insieme è un sottospazio vettoriale di $L(V, W)$?

Esercizio 2. Siano $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ funzioni lineari. Sia $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione data da $h(v) = g(f(v))$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Dimostrare che h ha sempre un autovalore uguale a 0, qualunque siano le funzioni f e g .

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare con le seguenti proprietà: $f(1, 1, 0) = (12, -4, -6)$; il vettore $(1, -1, 0)$ è un generatore dell'autospazio relativo all'autovalore -2 ; il vettore $(0, 1, -1)$ appartiene al nucleo di f .

- (a) Per quale valore di t il vettore $(3, 1, t)$ appartiene all'immagine di f ?
- (b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
- (c) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo l'insieme $S = \{(2\alpha + \beta, 2\beta + 3, \beta + 1, -\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

- (a) Determinare per quale valore di t il vettore $(4, -1, -1, t)$ appartiene a S .
- (b) Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (3, 2, 1, -1)$ e $u_2 = (0, 4, 2, 1)$. Determinare $U \cap S$.
- (c) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? Se la risposta è negativa determinare una base del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene S .

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, è dato l'endomorfismo f la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una base ortogonale dell'immagine di f .
- (b) Trovare una base di $(\operatorname{Im} f)^\perp$ e verificare che $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.
- (c) Dato $v = (2, 7, -1)$ determinare un vettore w di norma minima tale che $v + w \in \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo le seguenti rette:

$$r_\alpha : \begin{cases} x + \alpha y - 1 - \alpha^2 = 0 \\ 2\alpha y - z - 2\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

- (a) Le rette r_α passano tutte per uno stesso punto? Se sì, determinare tale punto.
- (b) Mostrare che tutte le rette r_α sono contenute nello stesso piano e scrivere l'equazione cartesiana di tale piano.
- (c) Consideriamo il punto $A = (2, -4, 8)$. Determinare il punto H , proiezione ortogonale di A sul piano trovato al punto (b) e, tra tutte le rette r_α , determinare quelle che hanno distanza minima dal punto A .

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

2° appello — 5 luglio 2019

Esercizio 1. Siano V e W spazi vettoriali reali di dimensioni $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$. Sia $L(V, W)$ lo spazio vettoriale i cui elementi sono le funzioni lineari $f: V \rightarrow W$. Quale è la dimensione di $L(V, W)$?

Fissiamo un vettore $v \in V$ e consideriamo l'insieme di tutte le funzioni lineari $f: V \rightarrow W$ il cui nucleo è generato dal vettore v . Questo insieme è un sottospazio vettoriale di $L(V, W)$?

Esercizio 2. Siano $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ funzioni lineari. Sia $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione data da $h(v) = g(f(v))$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Dimostrare che h ha sempre un autovalore uguale a 0, qualunque siano le funzioni f e g .

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare con le seguenti proprietà: $f(0, -1, 1) = (-2, 7, 7)$; il vettore $(0, 1, 1)$ è un generatore dell'autospazio relativo all'autovalore 3; il vettore $(1, 0, 1)$ appartiene al nucleo di f .

- (a) Per quale valore di t il vettore $(-2, t, 1)$ appartiene all'immagine di f ?
- (b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
- (c) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo l'insieme $S = \{(\alpha - 2\beta, 2\alpha - 2, 3\beta, 3 - \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

- (a) Determinare per quale valore di t il vettore $(0, 6, 6, t)$ appartiene a S .
- (b) Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (0, 4, 3, -2)$ e $u_2 = (3, 2, -3, -1)$. Determinare $U \cap S$.
- (c) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? Se la risposta è negativa determinare una base del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene S .

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, è dato l'endomorfismo f la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una base ortogonale dell'immagine di f .
- (b) Trovare una base di $(\operatorname{Im} f)^\perp$ e verificare che $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.
- (c) Dato $v = (7, -2, 0)$ determinare un vettore w di norma minima tale che $v + w \in \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo le seguenti rette:

$$r_\alpha : \begin{cases} \alpha x - y - \alpha^2 = 0 \\ 3\alpha x - z + 2 - 3\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

- (a) Le rette r_α passano tutte per uno stesso punto? Se sì, determinare tale punto.
- (b) Mostrare che tutte le rette r_α sono contenute nello stesso piano e scrivere l'equazione cartesiana di tale piano.
- (c) Consideriamo il punto $A = (-3, 5, 7)$. Determinare il punto H , proiezione ortogonale di A sul piano trovato al punto (b) e, tra tutte le rette r_α , determinare quelle che hanno distanza minima dal punto A .

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

2° appello — 5 luglio 2019

Esercizio 1. Siano V e W spazi vettoriali reali di dimensioni $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$. Sia $L(V, W)$ lo spazio vettoriale i cui elementi sono le funzioni lineari $f: V \rightarrow W$. Quale è la dimensione di $L(V, W)$?

Fissiamo un vettore $v \in V$ e consideriamo l'insieme di tutte le funzioni lineari $f: V \rightarrow W$ il cui nucleo è generato dal vettore v . Questo insieme è un sottospazio vettoriale di $L(V, W)$?

Esercizio 2. Siano $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ funzioni lineari. Sia $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione data da $h(v) = g(f(v))$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Dimostrare che h ha sempre un autovalore uguale a 0, qualunque siano le funzioni f e g .

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare con le seguenti proprietà: $f(1, 0, -1) = (5, 6, 7)$; il vettore $(1, 0, 1)$ è un generatore dell'autospazio relativo all'autovalore -3 ; il vettore $(0, 1, 1)$ appartiene al nucleo di f .

- (a) Per quale valore di t il vettore $(t, -3, 1)$ appartiene all'immagine di f ?
- (b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
- (c) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo l'insieme $S = \{(2\beta - 3, 2\alpha, 2\beta - \alpha, 2 - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

- (a) Determinare per quale valore di t il vettore $(3, 4, t, -1)$ appartiene a S .
- (b) Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (2, 4, 0, -1)$ e $u_2 = (4, -2, 5, -2)$. Determinare $U \cap S$.
- (c) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? Se la risposta è negativa determinare una base del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene S .

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, è dato l'endomorfismo f la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una base ortogonale dell'immagine di f .
- (b) Trovare una base di $(\text{Im } f)^\perp$ e verificare che $(\text{Im } f)^\perp = \text{Ker } f$.
- (c) Dato $v = (11, 0, -2)$ determinare un vettore w di norma minima tale che $v + w \in \text{Ker } f$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo le seguenti rette:

$$r_\alpha : \begin{cases} x - 3\alpha y + 3\alpha^2 = 0 \\ \alpha y + z + 1 - \alpha^2 = 0 \end{cases}$$

- (a) Le rette r_α passano tutte per uno stesso punto? Se sì, determinare tale punto.
- (b) Mostrare che tutte le rette r_α sono contenute nello stesso piano e scrivere l'equazione cartesiana di tale piano.
- (c) Consideriamo il punto $A = (-7, 2, 8)$. Determinare il punto H , proiezione ortogonale di A sul piano trovato al punto (b) e, tra tutte le rette r_α , determinare quelle che hanno distanza minima dal punto A .