A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, G. Peruginelli

3º appello — 3 settembre 2019

Esercizio 1. Sia A una matrice quadrata di ordine 3 a coefficienti reali. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $(x+1)^2(x-2)$, è possibile stabilire se la matrice A è invertibile?

Esercizio 2. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali tale che la somma dei suoi vettori colonna è uguale al vettore $(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)^T$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che α è un autovalore di A. (*Suggerimento*: a cosa è uguale la somma dei vettori colonna della matrice $A - \alpha I$? Oppure pensa a quale può essere un autovettore associato all'autovalore α.)

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i vettori $u_1 = (1, 2, -2, 1)$, $u_2 = (2, 4, -2, 0)$, $u_3 = (1, 2, 1, -2)$ e il sottospazio W di equazioni

$$W : \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Verificare che i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti e trovare una relazione di dipendenza lineare tra di essi.

(b) Determinare la dimensione di W e trovare una sua base.

(c) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$, dove U è il sottospazio generato dai vettori u_1, u_2, u_3.

Esercizio 4. Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(b) Scrivere la matrice P di cambiamento di base, tale che $B = AP$ e calcolare P^{-1}.

(c) Determinare il nucleo di f, prima usando la matrice A e poi usando la matrice B. Usando le matrici A e B si è trovato lo stesso sottospazio $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$? (*spiegare*).

Esercizio 5. Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare i cui autovalori sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 0$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 3$ ha equazione $x + y - z = 0$, mentre l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 0$ è la retta di equazioni $x + z = 0$, $x - y = 0$.

(a) Verificare che esiste una base **ortogonale** di $\mathbb{R}^3$ (rispetto al prodotto scalare usuale) formata da autovettori di f, e trovare una tale base.

(b) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base trovata nel punto (a) e poi scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le rette

$$r : \begin{cases} x + z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2y - z = 10 \end{cases}$$

(a) Verificare che le rette r e s sono sghembe.

(b) Determinare i punti $R \in r$ e $S \in s$ tali che la retta passante per R e S sia parallela al vettore $v = (1, 1, -3)$.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che ha uguale distanza (non nulla) da r e s.

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, G. Peruginelli

3$^{\text{o}}$ appello — 3 settembre 2019

Esercizio 1. Sia A una matrice quadrata di ordine 3 a coefficienti reali. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $(x+5)^2(x-1)$, è possibile stabilire se la matrice A è invertibile?

Esercizio 2. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali tale che la somma dei suoi vettori colonna è uguale al vettore $(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)^T$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che α è un autovalore di A. (*Suggerimento*: a cosa è uguale la somma dei vettori colonna della matrice $A - \alpha I$? Oppure pensa a quale può essere un autovettore associato all'autovalore α.)

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i vettori $u_1 = (1, 2, 0, -1)$, $u_2 = (1, -1, 3, 2)$, $u_3 = (1, -3, 5, 4)$ e il sottospazio W di equazioni

$$W : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

(a) Verificare che i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti e trovare una relazione di dipendenza lineare tra di essi.

(b) Determinare la dimensione di W e trovare una sua base.

(c) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$, dove U è il sottospazio generato dai vettori u_1, u_2, u_3.

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (0, -1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(b) Scrivere la matrice P di cambiamento di base, tale che $B = AP$ e calcolare P^{-1}.

(c) Determinare il nucleo di f, prima usando la matrice A e poi usando la matrice B. Usando le matrici A e B si è trovato lo stesso sottospazio $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$? (*spiegare*).

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare i cui autovalori sono $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 0$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 6$ ha equazione $x - 2y - z = 0$, mentre l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 0$ è la retta di equazioni $2x + y = 0$, $x + z = 0$.

(a) Verificare che esiste una base **ortogonale** di $\mathbb{R}^3$ (rispetto al prodotto scalare usuale) formata da autovettori di f, e trovare una tale base.

(b) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base trovata nel punto (a) e poi scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le rette

$$r : \begin{cases} x - z = 3 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 3z = 1 \\ 2z - y = 5 \end{cases}$$

(a) Verificare che le rette r e s sono sghembe.

(b) Determinare i punti $R \in r$ e $S \in s$ tali che la retta passante per R e S sia parallela al vettore $v = (3, 5, 1)$.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che ha uguale distanza (non nulla) da r e s.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, G. Peruginelli

3º appello — 3 settembre 2019

Esercizio 1. Sia A una matrice quadrata di ordine 3 a coefficienti reali. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $(x+3)^2(x-4)$, è possibile stabilire se la matrice A è invertibile?

Esercizio 2. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali tale che la somma dei suoi vettori colonna è uguale al vettore $(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)^T$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che α è un autovalore di A. (*Suggerimento*: a cosa è uguale la somma dei vettori colonna della matrice $A - \alpha I$? Oppure pensa a quale può essere un autovettore associato all'autovalore α.)

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i vettori $u_1 = (2, -4, 2, -2)$, $u_2 = (1, -3, 0, 1)$, $u_3 = (-2, 3, -3, 4)$ e il sottospazio W di equazioni

$$W : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Verificare che i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti e trovare una relazione di dipendenza lineare tra di essi.

(b) Determinare la dimensione di W e trovare una sua base.

(c) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$, dove U è il sottospazio generato dai vettori u_1, u_2, u_3.

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(b) Scrivere la matrice P di cambiamento di base, tale che $B = AP$ e calcolare P^{-1}.

(c) Determinare il nucleo di f, prima usando la matrice A e poi usando la matrice B. Usando le matrici A e B si è trovato lo stesso sottospazio $\operatorname{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$? (*spiegare*).

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare i cui autovalori sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 0$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 3$ ha equazione $x - y - z = 0$, mentre l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 0$ è la retta di equazioni $x + y = 0$, $x + z = 0$.

(a) Verificare che esiste una base **ortogonale** di $\mathbb{R}^3$ (rispetto al prodotto scalare usuale) formata da autovettori di f, e trovare una tale base.

(b) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base trovata nel punto (a) e poi scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le rette

$$r : \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3y + z = 2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x + y = -1 \\ z - x = 2 \end{cases}$$

(a) Verificare che le rette r e s sono sghembe.

(b) Determinare i punti $R \in r$ e $S \in s$ tali che la retta passante per R e S sia parallela al vettore $v = (2, 4, -3)$.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che ha uguale distanza (non nulla) da r e s.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola __________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

3º appello — 3 settembre 2019

Esercizio 1. Sia A una matrice quadrata di ordine 3 a coefficienti reali. Sapendo che il polinomio caratteristico di A è $(x+4)^2(x-5)$, è possibile stabilire se la matrice A è invertibile?

Esercizio 2. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali tale che la somma dei suoi vettori colonna è uguale al vettore $(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)^T$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che α è un autovalore di A. (*Suggerimento*: a cosa è uguale la somma dei vettori colonna della matrice $A - \alpha I$? Oppure pensa a quale può essere un autovettore associato all'autovalore α.)

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i vettori $u_1 = (1, 2, 2, 5)$, $u_2 = (2, -2, 1, 1)$, $u_3 = (2, -4, 0, -2)$ e il sottospazio W di equazioni

$$W : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Verificare che i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti e trovare una relazione di dipendenza lineare tra di essi.

(b) Determinare la dimensione di W e trovare una sua base.

(c) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$, dove U è il sottospazio generato dai vettori u_1, u_2, u_3.

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, -1, -1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(b) Scrivere la matrice P di cambiamento di base, tale che $B = AP$ e calcolare P^{-1}.

(c) Determinare il nucleo di f, prima usando la matrice A e poi usando la matrice B. Usando le matrici A e B si è trovato lo stesso sottospazio $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$? (*spiegare*).

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare i cui autovalori sono $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 0$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 6$ ha equazione $x + 2y - z = 0$, mentre l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 0$ è la retta di equazioni $x + z = 0$, $2x - y = 0$.

(a) Verificare che esiste una base **ortogonale** di $\mathbb{R}^3$ (rispetto al prodotto scalare usuale) formata da autovettori di f, e trovare una tale base.

(b) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base trovata nel punto (a) e poi scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le rette

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 5y - z = -16 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + z = 7 \end{cases}$$

(a) Verificare che le rette r e s sono sghembe.

(b) Determinare i punti $R \in r$ e $S \in s$ tali che la retta passante per R e S sia parallela al vettore $v = (1, -1, 1)$.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che ha uguale distanza (non nulla) da r e s.