



# Algebra Lineare e Geometria

16 giugno 2020

## Esercizio 1

Sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori  $u_1 = (2, -1, 0, 3)$ ,  $u_2 = (1, 4, -3, 3)$ ,  $u_3 = (1, -2, 1, 1)$  e sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  di equazioni  $3x_1 + x_3 = 0$ ,  $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ .

- (a) Si trovi una base di  $U$  e una base di  $W$ .
- (b) Si scriva un sistema di equazioni lineari nelle incognite  $x_1, x_2, x_3, x_4$  che abbia  $U$  come insieme delle soluzioni.
- (c) Si trovi una base di  $U \cap W$  e una base di  $U + W$ .
- (d) Si dica se esiste un sottospazio  $Z \subset \mathbb{R}^4$  tale che  $U \oplus Z = \mathbb{R}^4$  e  $W \oplus Z = \mathbb{R}^4$ . Se tale  $Z$  esiste se ne scriva una base.

## Esercizio 2

Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di  $f$ .
- (b) Sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (1, 0, 1)$  e  $u_2 = (2, 1, 0)$  e sia  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione definita ponendo  $g(u) = f(u)$ , per ogni  $u \in U$ . Scrivere la matrice di  $g$  rispetto alla base  $\{u_1, u_2\}$  di  $U$  e alla base canonica del codominio. La funzione  $g$  è iniettiva? è suriettiva?
- (c) Sia  $w_\alpha = (3, \alpha, -1)$ . Determinare per quale valore di  $\alpha$  l'immagine inversa  $f^{-1}(w_\alpha)$  è diversa dall'insieme vuoto.
- (d) È possibile stabilire, senza calcolare autovalori e autovettori, se  $A$  è diagonalizzabile? Perché?

## Esercizio 3

Nello spazio affine  $\mathbb{A}^3$  sono assegnati i punti  $A = (1, 2, 1)$ ,  $B = (2, 4, 1)$ ,  $C = (-1, 1, 2)$ .

- (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
- (b) Scrivere le equazioni parametriche della retta  $r$  ortogonale al piano  $\pi$  e passante per il baricentro  $G$  del triangolo  $ABC$ .
- (c) Determinare il punto  $Q$ , simmetrico di  $P = (6, -4, 5)$  rispetto al piano  $\pi$ .
- (d) Scrivere le equazioni parametriche della retta  $s$  contenuta nel piano  $\pi$ , passante per  $A$  e di minima distanza da  $P$ .