ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4^o appello — 2 febbraio 2021

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sono date le rette

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Determinare (se esiste) una retta ℓ che intersechi r e s e sia parallela a entrambi i piani $\pi \colon x + y = 0$ e $\pi' \colon x + z + 1 = 0$.

(c) Determinare l'equazione (parametrica o cartesiana) della retta r' passante per l'origine, perpendicolare alla retta r e contenuta nel piano π.

(d) Determinare l'equazione cartesiana del piano contenente la retta r e parallelo alla retta s.

Soluzione. (a) Mettendo a sistema le equazioni delle due rette si ottiene il sistema

$$r \cap s : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

il quale non ha soluzioni. Quindi r e s non sono incidenti.
Consideriamo due punti $R_1 = (0, 0, 0)$, $R_2 = (-3, 1, 1)$ sulla retta r. Il vettore direttore della retta r è $v_r = R_2 - R_1 = (-3, 1, 1)$.
Consideriamo due punti $S_1 = (-1, 0, 1)$, $S_2 = (1, 1, -2)$ sulla retta s. Il vettore direttore della retta s è $v_s = S_2 - S_1 = (2, 1, -3)$. Si vede quindi che i vettori v_r e v_s non sono proporzionali, quindi le rette r e s non sono parallele. Si conclude che r e s sono due rette sghembe.

(b) Un generico punto di r ha coordinate $R = R_1 + tv_r = (-3t, t, t)$. Un generico punto di s ha coordinate $S = S_1 + uv_s = (-1 + 2u, u, 1 - 3u)$. Il vettore che congiunge questi due punti è

$$S - R = (2u + 3t - 1, u - t, 1 - 3u - t).$$

Affinché la retta ℓ sia parallela a entrambi i piani $\pi \colon x + y = 0$ e $\pi' \colon x + z + 1 = 0$ è necessario che il vettore $S - R$ sia perpendicolare ad entrambi i vettori $n_\pi = (1, 1, 0)$ e $n_{\pi'} = (1, 0, 1)$. Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} (S - R) \cdot n_\pi = 3u + 2t - 1 = 0 \\ (S - R) \cdot n_{\pi'} = -u + 2t = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} t = 1/8 \\ u = 1/4 \end{cases}$$

da cui si ricavano i punti $R = (-3/8, 1/8, 1/8)$, $S = (-1/2, 1/4, 1/4)$ e il vettore $S - R = (-1/8, 1/8, 1/8)$, che è parallelo al vettore $8(S - R) = (-1, 1, 1)$.
La retta ℓ cercata è la retta passante per i punti R e S:

$$\ell : \begin{cases} x = -3/8 - \lambda \\ y = 1/8 + \lambda \\ z = 1/8 + \lambda \end{cases}$$

(c) Il vettore direttore della retta r' deve essere perpendicolare al vettore $v_r = (-3, 1, 1)$ e anche al vettore $n_\pi = (1, 1, 0)$. Possiamo quindi prendere $v_{r'} = v_r \times n_\pi = (-1, 1, -4)$.
Le equazioni parametriche della retta r' sono quindi

$$r' : \begin{cases} x = 0 - t \\ y = 0 + t \\ z = 0 - 4t \end{cases}$$

(d) Il piano contenente la retta r e parallelo alla retta s è il piano passante per $R_1 = (0, 0, 0)$ e parallelo ai vettori $v_r = (-3, 1, 1)$ e $v_s = (2, 1, -3)$. Le sue equazioni parametriche sono quindi

$$\begin{cases} x = -3a + 2b \\ y = a + b \\ z = a - 3b \end{cases}$$

Eliminando i parametri a e b si ottiene l'equazione cartesiana cercata:

$$4x + 7y + 5z = 0.$$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$ sia U il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene tutti i vettori del tipo $(1 + a, 1 - b, a + b, a - b)$, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Si trovi la dimensione e una base di U.

Sia $W_\alpha \in \mathbb{R}^4$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \alpha - 1 \\ -x_1 + 3x_2 + (\alpha - 1)x_3 + (\alpha + 1)x_4 = 1 - \alpha \\ 2x_2 + \alpha x_3 + (\alpha + 1)x_4 = 0 \end{cases}$$

(b) Si riduca tale sistema in forma a scala.

(c) In base al valore di α si dica se W_α è un sottospazio vettoriale o un sottospazio affine.

(d) Si determini la dimensione di W_α, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. (a) Si ha

$$(1 + a, 1 - b, a + b, a - b) = (1, 1, 0, 0) + a(1, 0, 1, 1) + b(0, -1, 1, -1)$$

quindi U deve contenere i tre vettori

$$u_1 = (1, 1, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1, 1), u_3 = (0, -1, 1, -1).$$

Poiché si verifica facilmente che i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti, si conclude che essi sono una base di U e quindi $\dim U = 3$.

(b) La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha - 1 \\ -1 & 3 & \alpha - 1 & \alpha + 1 & 1 - \alpha \\ 0 & 2 & \alpha & \alpha + 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una possibile forma a scala è
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha-1 \\ 0 & 4 & \alpha & \alpha+2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

(c) W_α è sempre un sottospazio affine, dato che è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare. Solo nel caso $\alpha = 1$ tale sistema è **omogeneo** e quindi, solo in tale caso, W_α è un sottospazio vettoriale.

(d) Se $\alpha = 0$ la matrice ha rango 2 e, in tale caso, il sistema si riduce a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Dato che ci sono 4 incognite e 2 equazioni la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 2.
Se invece $\alpha \neq 0$ la matrice ha rango 3 quindi nel sistema ci sono 4 incognite e 3 equazioni indipendenti. In tale caso la dimensione dell'insieme delle soluzioni è 1.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo

$$f(e_1) = (-3, -1, 1), \quad f(e_2) = (4, 1, -2)$$

e tale che $\operatorname{Ker} f$ è generato dal vettore $(2, 1, -1)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base canonica.

(b) Si determini il rango di f e si scriva una base dell'immagine di f.

(c) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di A e si dica se A è diagonalizzabile.

(d) Si dimostri che, per ogni intero **dispari** $n > 0$, si ha $A^n = A$.

Soluzione. (a) Le prime due colonne di A sono date da $f(e_1) = (-3, -1, 1)$ e $f(e_2) = (4, 1, -2)$. A è quindi una matrice del tipo
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & a \\ -1 & 1 & b \\ 1 & -2 & c \end{pmatrix}$$
Dato che il vettore $(2, 1, -1)$ appartiene al nucleo di f si deve avere

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & a \\ -1 & 1 & b \\ 1 & -2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da ciò si ricava $a = -2$, $b = -1$, $c = 0$ e quindi la matrice cercata è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Dato che $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$ e $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = 3$, si deduce che il rango di f, cioè $\dim(\operatorname{Im} f)$, è 2. Una base di $\operatorname{Im} f$ è formata da $f(e_1) = (-3, -1, 1)$ e $f(e_2) = (4, 1, -2)$.

(c) Si ha
$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 0-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda+1)^2$$

da cui si deduce che gli autovalori di A sono 0 (con molteplicità 1) e -1 (con molteplicità 2). Per l'autovalore 0 un autovettore è il vettore $(2,1,-1)$ che genera il nucleo di f. Per l'autovalore -1 si trova che gli autovettori sono dati dalle soluzioni dell'equazione $x-2y+z=0$. Questo autospazio ha dimensione 2 e una sua base è formata dai vettori $(2,1,0)$ e $(-1,0,1)$. Si conclude che la matrice A è diagonalizzabile e si ha $A = PDP^{-1}$, con

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Si ha $A^n = PD^nP^{-1}$. Si ha inoltre

$$D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

da cui segue che $D^n = -D$ se n è pari, $D^n = D$ se n è dispari.
Quindi, per n dispari, si ha $A^n = PD^nP^{-1} = PDP^{-1} = A$.