**A**

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**2° appello — 2 luglio 2021**

---

**Esercizio 1.** In $\mathbb{R}^4$ sia $V$ il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 + x_4 = 0$ e sia $U$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 1, -1, -2)$, $u_2 = (-1, 2, 0, 1)$, $u_3 = (3, 4, -2, -3)$.

(a) Determinare la dimensione e una base di $V$.

(b) Determinare la dimensione e una base di $U$ e verificare che $U \subset V$.

(c) Trovare un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = V$. Tale $L$ è unico?

(d) Esiste una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} f = V$ e $\operatorname{Ker} f = L$? Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} g = U$ e $\operatorname{Ker} g = L$? (*Le risposte devono essere giustificate*)

**Esercizio 2.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare che contiene il vettore $(3, -2, 1)$ nel nucleo e il cui polinomio caratteristico è $x(x-2)^2$. Sappiamo inoltre che l'autospazio relativo all'autovalore non nullo è il piano di equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

(a) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di $f$ è diagonale.

(b) Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinare gli autovalori e gli autovettori di $A$ e stabilire se $A$ è diagonalizzabile.

(c) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di $f$ è $A$? (*la risposta deve essere giustificata*)

**Esercizio 3.** Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Im} f$ e una base di $(\operatorname{Im} f)^\perp$ e verificare che $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.

(b) Usando il procedimento di Gram–Schmidt trovare una base ortogonale di $\operatorname{Im} f$.

(c) Dato il vettore $v = (1, 5, -3, 1)$, trovare $u \in \operatorname{Ker} f$ e $w \in \operatorname{Im} f$ tali che $v = u + w$.

**Esercizio 4.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo l'insieme $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ dei piani di equazione

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma} : (\alpha + \gamma)\, x + (\beta - \alpha)\, y + (\gamma + 2\beta)\, z = \gamma, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \text{non tutti nulli.}$$

(a) Verificare che tutti questi piani passano per uno stesso punto $P$ e trovare tale punto.

(b) Fra tutti i piani di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ trovare quello parallelo al piano di equazione $3x + y = 1$.

(c) Sia $s$ la retta passante per l'origine e parallela al vettore $v_s = (0, 1, 1)$. Trovare l'unico piano di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ che contiene la retta $s$.

**B**

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**2º appello — 2 luglio 2021**

---

**Esercizio 1.** In $\mathbb{R}^4$ sia $V$ il sottospazio vettoriale di equazione $x_2 - x_4 = 0$ e sia $U$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 1, -3, 1)$, $u_2 = (-3, 2, 4, 2)$, $u_3 = (1, 4, -2, 4)$.

(a) Determinare la dimensione e una base di $V$.

(b) Determinare la dimensione e una base di $U$ e verificare che $U \subset V$.

(c) Trovare un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = V$. Tale $L$ è unico?

(d) Esiste una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} f = V$ e $\operatorname{Ker} f = L$? Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} g = U$ e $\operatorname{Ker} g = L$? (*Le risposte devono essere giustificate*)

**Esercizio 2.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare che contiene il vettore $(1, 3, -2)$ nel nucleo e il cui polinomio caratteristico è $x(x-3)^2$. Sappiamo inoltre che l'autospazio relativo all'autovalore non nullo è il piano di equazione $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

(a) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di $f$ è diagonale.

(b) Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare gli autovalori e gli autovettori di $A$ e stabilire se $A$ è diagonalizzabile.

(c) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di $f$ è $A$? (*la risposta deve essere giustificata*)

**Esercizio 3.** Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Im} f$ e una base di $(\operatorname{Im} f)^\perp$ e verificare che $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.

(b) Usando il procedimento di Gram–Schmidt trovare una base ortogonale di $\operatorname{Im} f$.

(c) Dato il vettore $v = (6, 4, -3, -1)$, trovare $u \in \operatorname{Ker} f$ e $w \in \operatorname{Im} f$ tali che $v = u + w$.

**Esercizio 4.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo l'insieme $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ dei piani di equazione

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma} : (3\beta + \gamma)\, x + (\alpha - \beta)\, y + (\alpha + \gamma)\, z = -2\gamma, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ non tutti nulli.}$$

(a) Verificare che tutti questi piani passano per uno stesso punto $P$ e trovare tale punto.

(b) Fra tutti i piani di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ trovare quello parallelo al piano di equazione $x - 2z = 1$.

(c) Sia $s$ la retta passante per l'origine e parallela al vettore $v_s = (1, 0, 1)$. Trovare l'unico piano di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ che contiene la retta $s$.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**2º appello — 2 luglio 2021**

---

**Esercizio 1.** In $\mathbb{R}^4$ sia $V$ il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 - 2x_3 = 0$ e sia $U$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 1, 2)$, $u_2 = (-4, 4, -2, -3)$, $u_3 = (2, 1, 1, 3)$.

(a) Determinare la dimensione e una base di $V$.

(b) Determinare la dimensione e una base di $U$ e verificare che $U \subset V$.

(c) Trovare un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = V$. Tale $L$ è unico?

(d) Esiste una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} f = V$ e $\operatorname{Ker} f = L$? Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} g = U$ e $\operatorname{Ker} g = L$? (*Le risposte devono essere giustificate*)

**Esercizio 2.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare che contiene il vettore $(2, -1, -3)$ nel nucleo e il cui polinomio caratteristico è $x(x+1)^2$. Sappiamo inoltre che l'autospazio relativo all'autovalore non nullo è il piano di equazione $x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$.

(a) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di $f$ è diagonale.

(b) Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Determinare gli autovalori e gli autovettori di $A$ e stabilire se $A$ è diagonalizzabile.

(c) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di $f$ è $A$? (*la risposta deve essere giustificata*)

**Esercizio 3.** Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 & -3 \\ -3 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Im} f$ e una base di $(\operatorname{Im} f)^\perp$ e verificare che $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.

(b) Usando il procedimento di Gram–Schmidt trovare una base ortogonale di $\operatorname{Im} f$.

(c) Dato il vettore $v = (4, 0, 4, -8)$, trovare $u \in \operatorname{Ker} f$ e $w \in \operatorname{Im} f$ tali che $v = u + w$.

**Esercizio 4.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo l'insieme $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ dei piani di equazione

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma} : (\alpha+\beta)\,x + (3\gamma - 2\beta)\,y + (\alpha+\gamma)\,z = \gamma, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \text{non tutti nulli.}$$

(a) Verificare che tutti questi piani passano per uno stesso punto $P$ e trovare tale punto.

(b) Fra tutti i piani di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ trovare quello parallelo al piano di equazione $2y - 3z = 1$.

(c) Sia $s$ la retta passante per l'origine e parallela al vettore $v_s = (1, 1, 0)$. Trovare l'unico piano di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ che contiene la retta $s$.

**D**

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**2° appello — 2 luglio 2021**

---

**Esercizio 1.** In $\mathbb{R}^4$ sia $V$ il sottospazio vettoriale di equazione $2x_2+x_3=0$ e sia $U$ il sottospazio generato dai vettori $u_1=(3,1,-2,-1)$, $u_2=(-5,-2,4,1)$, $u_3=(4,1,-2,-2)$.

(a) Determinare la dimensione e una base di $V$.

(b) Determinare la dimensione e una base di $U$ e verificare che $U\subset V$.

(c) Trovare un sottospazio $L\subset\mathbb{R}^4$ tale che $U\oplus L=V$. Tale $L$ è unico?

(d) Esiste una funzione lineare $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} f=V$ e $\operatorname{Ker} f=L$? Esiste una funzione lineare $g\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} g=U$ e $\operatorname{Ker} g=L$? (*Le risposte devono essere giustificate*)

**Esercizio 2.** Sia $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una funzione lineare che contiene il vettore $(1,2,-2)$ nel nucleo e il cui polinomio caratteristico è $x(x+2)^2$. Sappiamo inoltre che l'autospazio relativo all'autovalore non nullo è il piano di equazione $3x_1+2x_2-x_3=0$.

(a) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di $f$ è diagonale.

(b) Consideriamo ora la matrice

$$A=\begin{pmatrix}-3&5&3\\1&-3&-1\\-2&6&2\end{pmatrix}$$

Determinare gli autovalori e gli autovettori di $A$ e stabilire se $A$ è diagonalizzabile.

(c) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di $f$ è $A$? (*la risposta deve essere giustificata*)

**Esercizio 3.** Sia $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1&-3\\0&8&-2&2\\1&-2&1&-2\\-3&2&-2&5\end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Im} f$ e una base di $(\operatorname{Im} f)^\perp$ e verificare che $(\operatorname{Im} f)^\perp=\operatorname{Ker} f$.

(b) Usando il procedimento di Gram–Schmidt trovare una base ortogonale di $\operatorname{Im} f$.

(c) Dato il vettore $v=(1,-3,7,-3)$, trovare $u\in\operatorname{Ker} f$ e $w\in\operatorname{Im} f$ tali che $v=u+w$.

**Esercizio 4.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo l'insieme $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ dei piani di equazione

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}:(\beta+\gamma)\,x+(\alpha+3\beta)\,y+(2\gamma-\alpha)\,z=\gamma,\qquad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \text{non tutti nulli.}$$

(a) Verificare che tutti questi piani passano per uno stesso punto $P$ e trovare tale punto.

(b) Fra tutti i piani di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ trovare quello parallelo al piano di equazione $2x+z=1$.

(c) Sia $s$ la retta passante per l'origine e parallela al vettore $v_s=(1,0,-1)$. Trovare l'unico piano di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ che contiene la retta $s$.