A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4º appello — 1 febbraio 2022

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale di equazione $2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$ e W il sottospazio generato dal vettore $w = (1, 1, 1, 1)$.

(a) Verificare che $W \subset U$ e trovare due vettori u_1, u_2 tali che $\{w, u_1, u_2\}$ sia una base di U.

(b) Scrivere le coordinate del vettore w rispetto alla base di U trovata nel punto (a).

(c) Scrivere la matrice (rispetto alla base canonica) di una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $U = \operatorname{Im} f$ e $W = \operatorname{Ker} f$. Se una tale funzione non esiste, si spieghi perché.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la seguente funzione lineare:

$$f(x, y, z) = (2x - 8y + 4z, x - 6y + 2z, -4y).$$

(a) Determinare la dimensione e una base dell'immagine di f.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di f.

(c) Determinare una base degli autospazi di f e stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dal vettore $\ell = (0, 1, 1, 0)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Sia $V = U^\perp \cap L^\perp$. Trovare una base di V.

(c) Dato il vettore $w = (2, 3, -2, 2) \in \mathbb{R}^4$, determinare la sua proiezione ortogonale su $V^\perp$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ sia σ il sottospazio affine di equazioni

$$\sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 4 \end{cases}$$

(a) Determinare la dimensione di σ e una base del suo spazio direttore.

(b) Sia π il piano passante per $P = (1, 2, -2, 1)$ e parallelo ai vettori $v_1 = (1, 0, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 2)$. Determinare $\pi \cap \sigma$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per P, contenuta nel piano π e ortogonale al vettore $w = (1, 1, -1, 1)$.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4$^{\text{o}}$ appello — 1 febbraio 2022

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale di equazione $3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$ e W il sottospazio generato dal vettore $w = (1, 1, 1, 2)$.

(a) Verificare che $W \subset U$ e trovare due vettori u_1, u_2 tali che $\{w, u_1, u_2\}$ sia una base di U.

(b) Scrivere le coordinate del vettore w rispetto alla base di U trovata nel punto (a).

(c) Scrivere la matrice (rispetto alla base canonica) di una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $U = \operatorname{Im} f$ e $W = \operatorname{Ker} f$. Se una tale funzione non esiste, si spieghi perché.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la seguente funzione lineare:

$$f(x, y, z) = (4x - 2y + 4z, 2y, -2x + 5y - 2z).$$

(a) Determinare la dimensione e una base dell'immagine di f.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di f.

(c) Determinare una base degli autospazi di f e stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dal vettore $\ell = (2, 0, -1, 0)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Sia $V = U^\perp \cap L^\perp$. Trovare una base di V.

(c) Dato il vettore $w = (3, -5, 4, -5) \in \mathbb{R}^4$, determinare la sua proiezione ortogonale su $V^\perp$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ sia σ il sottospazio affine di equazioni

$$\sigma : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare la dimensione di σ e una base del suo spazio direttore.

(b) Sia π il piano passante per $P = (3, -1, 0, 0)$ e parallelo ai vettori $v_1 = (2, 0, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 1)$. Determinare $\pi \cap \sigma$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per P, contenuta nel piano π e ortogonale al vettore $w = (1, 2, -1, -1)$.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4$^{\text{o}}$ appello — 1 febbraio 2022

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$ e W il sottospazio generato dal vettore $w = (1, 1, 1, 1)$.

(a) Verificare che $W \subset U$ e trovare due vettori u_1, u_2 tali che $\{w, u_1, u_2\}$ sia una base di U.

(b) Scrivere le coordinate del vettore w rispetto alla base di U trovata nel punto (a).

(c) Scrivere la matrice (rispetto alla base canonica) di una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $U = \operatorname{Im} f$ e $W = \operatorname{Ker} f$. Se una tale funzione non esiste, si spieghi perché.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la seguente funzione lineare:

$$f(x, y, z) = (3x + 4y + 3z, -3y, -6x - 2y - 6z).$$

(a) Determinare la dimensione e una base dell'immagine di f.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di f.

(c) Determinare una base degli autospazi di f e stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dal vettore $\ell = (0, 1, 0, -1)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Sia $V = U^\perp \cap L^\perp$. Trovare una base di V.

(c) Dato il vettore $w = (-2, 0, 4, -1) \in \mathbb{R}^4$, determinare la sua proiezione ortogonale su $V^\perp$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ sia σ il sottospazio affine di equazioni

$$\sigma : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_3 = 1 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

(a) Determinare la dimensione di σ e una base del suo spazio direttore.

(b) Sia π il piano passante per $P = (0, 2, 2, 0)$ e parallelo ai vettori $v_1 = (1, 0, 2, 0)$, $v_2 = (2, -1, 0, 1)$. Determinare $\pi \cap \sigma$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per P, contenuta nel piano π e ortogonale al vettore $w = (-1, 1, 1, 1)$.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4º appello — 1 febbraio 2022

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale di equazione $2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$ e W il sottospazio generato dal vettore $w = (1, 1, 3, 1)$.

(a) Verificare che $W \subset U$ e trovare due vettori u_1, u_2 tali che $\{w, u_1, u_2\}$ sia una base di U.

(b) Scrivere le coordinate del vettore w rispetto alla base di U trovata nel punto (a).

(c) Scrivere la matrice (rispetto alla base canonica) di una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $U = \operatorname{Im} f$ e $W = \operatorname{Ker} f$. Se una tale funzione non esiste, si spieghi perché.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la seguente funzione lineare:

$$f(x, y, z) = (6x - y - 3z, 3y, 6x - 7y - 3z).$$

(a) Determinare la dimensione e una base dell'immagine di f.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di f.

(c) Determinare una base degli autospazi di f e stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dal vettore $\ell = (2, 0, 0, -1)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Sia $V = U^\perp \cap L^\perp$. Trovare una base di V.

(c) Dato il vettore $w = (3, 3, -3, -3) \in \mathbb{R}^4$, determinare la sua proiezione ortogonale su $V^\perp$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ sia σ il sottospazio affine di equazioni

$$\sigma : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_2 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$$

(a) Determinare la dimensione di σ e una base del suo spazio direttore.

(b) Sia π il piano passante per $P = (3, 1, -1, -2)$ e parallelo ai vettori $v_1 = (2, 0, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, 2, 1)$. Determinare $\pi \cap \sigma$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per P, contenuta nel piano π e ortogonale al vettore $w = (1, -1, 1, 1)$.