

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° Compitino — 9 aprile 2022

**Esercizio 1.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & t & 7 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcolare il rango di  $A$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$  mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss.
- (b) Sia  $t = 5$  e sia  $u = (-1, \alpha, 0)$ . Determinare per quale valore di  $\alpha$  il sistema  $AX = u$  ammette soluzioni.
- (c) Sia  $t = 5$ . Determinare tutte le soluzioni del sistema  $AX = v$ , con  $v = (1, 1, 2)$ .
- (d) Esiste un valore di  $t$  tale che il sistema  $AX = \vec{0}$  abbia come **unica** soluzione  $X = \vec{0}$ ? (la risposta deve essere giustificata)

**Esercizio 2.** Sia  $U \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia  $W = \{(a + 2b, -a + b, -2b + c, a + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ .

- (a) Determinare una base di  $U$  e una base di  $W$ .
- (b) Scrivere un'equazione nelle incognite  $x_1, x_2, x_3, x_4$  il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio  $W$ .
- (c) Determinare la dimensione e una base di  $U \cap W$  e di  $U + W$ .
- (d) Esiste un sottospazio non nullo  $L \subset \mathbb{R}^4$  tale che la somma  $U + L$  sia diretta e anche la somma  $W + L$  sia diretta? Se la risposta è NO si spieghi perché, altrimenti si trovi una base di un tale sottospazio  $L$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (2x + y + 3z, 2y - 2z, -x + 2y - 4z).$$

- (a) Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Determinare una base del nucleo di  $f$  e una base dell'immagine di  $f$ .
- (c) Determinare il valore di  $t$  tale che  $v = (1, t, 7) \in \text{Im } f$ . Per tale valore di  $t$  determinare  $f^{-1}(v)$ .
- (d) Consideriamo ora i vettori  $u_1 = (0, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)$ ,  $u_3 = (1, 1, 0)$ . Scrivere la matrice di  $f$  prendendo  $\{u_1, u_2, u_3\}$  come base del **dominio** e la base canonica come base del **codominio**.

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° Compitino — 9 aprile 2022

---

**Esercizio 1.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & t & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcolare il rango di  $A$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$  mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss.
- (b) Sia  $t = -3$  e sia  $u = (2, \alpha, 0)$ . Determinare per quale valore di  $\alpha$  il sistema  $AX = u$  ammette soluzioni.
- (c) Sia  $t = -3$ . Determinare tutte le soluzioni del sistema  $AX = v$ , con  $v = (1, 2, -1)$ .
- (d) Esiste un valore di  $t$  tale che il sistema  $AX = \vec{0}$  abbia come **unica** soluzione  $X = \vec{0}$ ? (la risposta deve essere giustificata)

**Esercizio 2.** Sia  $U \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia  $W = \{(a + 2b, -b, -2a + c, a + 2b + 2c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ .

- (a) Determinare una base di  $U$  e una base di  $W$ .
- (b) Scrivere un'equazione nelle incognite  $x_1, x_2, x_3, x_4$  il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio  $W$ .
- (c) Determinare la dimensione e una base di  $U \cap W$  e di  $U + W$ .
- (d) Esiste un sottospazio non nullo  $L \subset \mathbb{R}^4$  tale che la somma  $U + L$  sia diretta e anche la somma  $W + L$  sia diretta? Se la risposta è NO si spieghi perché, altrimenti si trovi una base di un tale sottospazio  $L$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x + 3z, -3x + 4y - z, 2x - y + 4z).$$

- (a) Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Determinare una base del nucleo di  $f$  e una base dell'immagine di  $f$ .
- (c) Determinare il valore di  $t$  tale che  $v = (t, -2, 3) \in \text{Im } f$ . Per tale valore di  $t$  determinare  $f^{-1}(v)$ .
- (d) Consideriamo ora i vettori  $u_1 = (0, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)$ ,  $u_3 = (1, 1, 0)$ . Scrivere la matrice di  $f$  prendendo  $\{u_1, u_2, u_3\}$  come base del **dominio** e la base canonica come base del **codominio**.

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**1° Compitino — 9 aprile 2022**

---

**Esercizio 1.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & t & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcolare il rango di  $A$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$  mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss.
- (b) Sia  $t = -4$  e sia  $u = (1, \alpha, 0)$ . Determinare per quale valore di  $\alpha$  il sistema  $AX = u$  ammette soluzioni.
- (c) Sia  $t = -4$ . Determinare tutte le soluzioni del sistema  $AX = v$ , con  $v = (1, 4, -1)$ .
- (d) Esiste un valore di  $t$  tale che il sistema  $AX = \vec{0}$  abbia come **unica** soluzione  $X = \vec{0}$ ? (la risposta deve essere giustificata)

**Esercizio 2.** Sia  $U \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia  $W = \{(2a + b, -a + 2b, -b + 2c, a + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ .

- (a) Determinare una base di  $U$  e una base di  $W$ .
- (b) Scrivere un'equazione nelle incognite  $x_1, x_2, x_3, x_4$  il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio  $W$ .
- (c) Determinare la dimensione e una base di  $U \cap W$  e di  $U + W$ .
- (d) Esiste un sottospazio non nullo  $L \subset \mathbb{R}^4$  tale che la somma  $U + L$  sia diretta e anche la somma  $W + L$  sia diretta? Se la risposta è NO si spieghi perché, altrimenti si trovi una base di un tale sottospazio  $L$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (3x + y + 3z, x + 2y - 4z, -y + 3z).$$

- (a) Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Determinare una base del nucleo di  $f$  e una base dell'immagine di  $f$ .
- (c) Determinare il valore di  $t$  tale che  $v = (7, -1, t) \in \text{Im } f$ . Per tale valore di  $t$  determinare  $f^{-1}(v)$ .
- (d) Consideriamo ora i vettori  $u_1 = (0, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)$ ,  $u_3 = (1, 1, 0)$ . Scrivere la matrice di  $f$  prendendo  $\{u_1, u_2, u_3\}$  come base del **dominio** e la base canonica come base del **codominio**.

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° Compitino — 9 aprile 2022

---

**Esercizio 1.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & t & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcolare il rango di  $A$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$  mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss.
- (b) Sia  $t = -5$  e sia  $u = (-2, \alpha, 0)$ . Determinare per quale valore di  $\alpha$  il sistema  $AX = u$  ammette soluzioni.
- (c) Sia  $t = -5$ . Determinare tutte le soluzioni del sistema  $AX = v$ , con  $v = (1, 3, -2)$ .
- (d) Esiste un valore di  $t$  tale che il sistema  $AX = \vec{0}$  abbia come **unica** soluzione  $X = \vec{0}$ ? (la risposta deve essere giustificata)

**Esercizio 2.** Sia  $U \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia  $W = \{(2a + b, a - b, 2a + c, 2b - c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ .

- (a) Determinare una base di  $U$  e una base di  $W$ .
- (b) Scrivere un'equazione nelle incognite  $x_1, x_2, x_3, x_4$  il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio  $W$ .
- (c) Determinare la dimensione e una base di  $U \cap W$  e di  $U + W$ .
- (d) Esiste un sottospazio non nullo  $L \subset \mathbb{R}^4$  tale che la somma  $U + L$  sia diretta e anche la somma  $W + L$  sia diretta? Se la risposta è NO si spieghi perché, altrimenti si trovi una base di un tale sottospazio  $L$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (2x + y + 5z, -x - 3z, 2x + 3y + 3z).$$

- (a) Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Determinare una base del nucleo di  $f$  e una base dell'immagine di  $f$ .
- (c) Determinare il valore di  $t$  tale che  $v = (2, -2, t) \in \text{Im } f$ . Per tale valore di  $t$  determinare  $f^{-1}(v)$ .
- (d) Consideriamo ora i vettori  $u_1 = (0, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)$ ,  $u_3 = (1, 1, 0)$ . Scrivere la matrice di  $f$  prendendo  $\{u_1, u_2, u_3\}$  come base del **dominio** e la base canonica come base del **codominio**.