

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 14 giugno 2022

Esercizio 1. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(2x_1 - x_2 - \frac{5}{2}x_3 + x_4, -x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4, x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, 2x_2 + x_3 \right)$$

- (a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Calcolare il rango di A e trovare basi di $\text{Ker}(f)$ e di $\text{Im}(f)$.
- (c) Trovare la dimensione e una base di $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.
- (d) Esiste una funzione lineare $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\text{Ker}(g) = \text{Im}(g)$? (la risposta deve essere giustificata)

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una base del nucleo di A .
- (b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A .
- (c) Trovare le basi degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.
- (d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad A ? (la risposta deve essere giustificata)

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^4 , dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, 2, -2)$, $u_2 = (0, 1, -4, 5)$.

- (a) Trovare una base ortogonale di U .
- (b) Scrivere le equazioni cartesiane di U^\perp e trovare una sua base.
- (c) Dato $v = (-1, 4, 0, 4) \in \mathbb{R}^4$ determinare la sua proiezione ortogonale su U .
- (d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (1, 1, -2, 0)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ consideriamo i piani

$$\pi: 2x - y + z - 1 = 0, \quad \sigma_\alpha: (\alpha + 2)x - 2y + \alpha z + \alpha = 0.$$

- (a) Determinare il valore di α per cui i piani σ_α e π sono paralleli. Per tale valore di α calcolare la distanza tra i piani π e σ_α .
- (b) Determinare il valore di α per cui le rette ortogonali al piano σ_α sono parallele al piano π .
- (c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.
- (d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1, 0, -1) \in \pi$ trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per P e S sia ortogonale a π .

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 14 giugno 2022

Esercizio 1. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1 - x_2 - x_3 + \frac{1}{2}x_4, 2x_2 + 4x_3, -2x_1 + x_2 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}x_4 \right)$$

- (a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Calcolare il rango di A e trovare basi di $\text{Ker}(f)$ e di $\text{Im}(f)$.
- (c) Trovare la dimensione e una base di $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.
- (d) Esiste una funzione lineare $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\text{Ker}(g) = \text{Im}(g)$? (la risposta deve essere giustificata)

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una base del nucleo di A .
- (b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A .
- (c) Trovare le basi degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.
- (d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad A ? (la risposta deve essere giustificata)

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^4 , dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 0, 1)$, $u_2 = (5, -2, 2, 0)$.

- (a) Trovare una base ortogonale di U .
- (b) Scrivere le equazioni cartesiane di U^\perp e trovare una sua base.
- (c) Dato $v = (3, 2, -4, 2) \in \mathbb{R}^4$ determinare la sua proiezione ortogonale su U .
- (d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (0, 1, 2, -1)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ consideriamo i piani

$$\pi : x + 2y - z - 2 = 0, \quad \sigma_\alpha : 3x + (\alpha + 3)y - \alpha z + \alpha = 0.$$

- (a) Determinare il valore di α per cui i piani σ_α e π sono paralleli. Per tale valore di α calcolare la distanza tra i piani π e σ_α .
- (b) Determinare il valore di α per cui le rette ortogonali al piano σ_α sono parallele al piano π .
- (c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.
- (d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1, 0, -1) \in \pi$ trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per P e S sia ortogonale a π .

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 14 giugno 2022

Esercizio 1. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 - \frac{5}{2}x_3 - 2x_4, 2x_2 + x_3 + 4x_4, -x_1 + x_3 \right)$$

- (a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Calcolare il rango di A e trovare basi di $\text{Ker}(f)$ e di $\text{Im}(f)$.
- (c) Trovare la dimensione e una base di $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.
- (d) Esiste una funzione lineare $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\text{Ker}(g) = \text{Im}(g)$? (la risposta deve essere giustificata)

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una base del nucleo di A .
- (b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A .
- (c) Trovare le basi degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.
- (d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad A ? (la risposta deve essere giustificata)

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^4 , dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, -2, 0)$, $u_2 = (4, 0, -5, 3)$.

- (a) Trovare una base ortogonale di U .
- (b) Scrivere le equazioni cartesiane di U^\perp e trovare una sua base.
- (c) Dato $v = (6, 2, -4, 2) \in \mathbb{R}^4$ determinare la sua proiezione ortogonale su U .
- (d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (3, 1, -4, 0)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ consideriamo i piani

$$\pi : x - y + 2z + 1 = 0, \quad \sigma_\alpha : 2x + \alpha y + (2 - \alpha)z + \alpha = 0.$$

- (a) Determinare il valore di α per cui i piani σ_α e π sono paralleli. Per tale valore di α calcolare la distanza tra i piani π e σ_α .
- (b) Determinare il valore di α per cui le rette ortogonali al piano σ_α sono parallele al piano π .
- (c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.
- (d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1, 2, 0) \in \pi$ trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per P e S sia ortogonale a π .

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 14 giugno 2022

Esercizio 1. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(2x_2 - x_3 - x_4, x_1 - 2x_3, 2x_1 - x_2 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \right)$$

- (a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Calcolare il rango di A e trovare basi di $\text{Ker}(f)$ e di $\text{Im}(f)$.
- (c) Trovare la dimensione e una base di $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.
- (d) Esiste una funzione lineare $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\text{Ker}(g) = \text{Im}(g)$? (la risposta deve essere giustificata)

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una base del nucleo di A .
- (b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A .
- (c) Trovare le basi degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.
- (d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad A ? (la risposta deve essere giustificata)

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^4 , dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -2, 0, -1)$, $u_2 = (0, 5, -2, 2)$.

- (a) Trovare una base ortogonale di U .
- (b) Scrivere le equazioni cartesiane di U^\perp e trovare una sua base.
- (c) Dato $v = (3, 3, 0, 3) \in \mathbb{R}^4$ determinare la sua proiezione ortogonale su U .
- (d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (1, -1, 2, 1)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ consideriamo i piani

$$\pi : x - 2y + z - 2 = 0, \quad \sigma_\alpha : \alpha x + (3 - \alpha)y - 3z + \alpha = 0.$$

- (a) Determinare il valore di α per cui i piani σ_α e π sono paralleli. Per tale valore di α calcolare la distanza tra i piani π e σ_α .
- (b) Determinare il valore di α per cui le rette ortogonali al piano σ_α sono parallele al piano π .
- (c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.
- (d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1, 0, 1) \in \pi$ trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per P e S sia ortogonale a π .