**A**

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**2° Compitino — 14 giugno 2022**

---

**Esercizio 1.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di $A$.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $A$.

(c) Trovare le basi degli autospazi e dire se $A$ è diagonalizzabile.

(d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad $A$? (*la risposta deve essere giustificata*)

**Esercizio 2.** Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia $U$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, 2, -2)$, $u_2 = (0, 1, -4, 5)$.

(a) Trovare una base ortogonale di $U$.

(b) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^\perp$ e trovare una sua base.

(c) Dato $v = (-1, 4, 0, 4) \in \mathbb{R}^4$ determinare la sua proiezione ortogonale su $U$.

(d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di $v$ su $W$ sia il vettore $w = (1, 1, -2, 0)$.

**Esercizio 3.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo i piani

$$\pi : 2x - y + z - 1 = 0, \qquad \sigma_\alpha : (\alpha + 2)x - 2y + \alpha z + \alpha = 0.$$

(a) Determinare il valore di $\alpha$ per cui i piani $\sigma_\alpha$ e $\pi$ sono paralleli. Per tale valore di $\alpha$ calcolare la distanza tra i piani $\pi$ e $\sigma_\alpha$.

(b) Determinare il valore di $\alpha$ per cui le rette ortogonali al piano $\sigma_\alpha$ sono parallele al piano $\pi$.

(c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.

(d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1, 0, -1) \in \pi$ trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per $P$ e $S$ sia ortogonale a $\pi$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**2° Compitino — 14 giugno 2022**

---

**Esercizio 1.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di $A$.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $A$.

(c) Trovare le basi degli autospazi e dire se $A$ è diagonalizzabile.

(d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad $A$? (*la risposta deve essere giustificata*)

**Esercizio 2.** Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia $U$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 0, 1)$, $u_2 = (5, -2, 2, 0)$.

(a) Trovare una base ortogonale di $U$.

(b) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^\perp$ e trovare una sua base.

(c) Dato $v = (3, 2, -4, 2) \in \mathbb{R}^4$ determinare la sua proiezione ortogonale su $U$.

(d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di $v$ su $W$ sia il vettore $w = (0, 1, 2, -1)$.

**Esercizio 3.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo i piani

$$\pi : x + 2y - z - 2 = 0, \qquad \sigma_\alpha : 3x + (\alpha + 3)y - \alpha z + \alpha = 0.$$

(a) Determinare il valore di $\alpha$ per cui i piani $\sigma_\alpha$ e $\pi$ sono paralleli. Per tale valore di $\alpha$ calcolare la distanza tra i piani $\pi$ e $\sigma_\alpha$.

(b) Determinare il valore di $\alpha$ per cui le rette ortogonali al piano $\sigma_\alpha$ sono parallele al piano $\pi$.

(c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.

(d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1, 0, -1) \in \pi$ trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per $P$ e $S$ sia ortogonale a $\pi$.

C

Cognome ____________ Nome ____________ Matricola ________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**2° Compitino — 14 giugno 2022**

---

**Esercizio 1.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di $A$.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $A$.

(c) Trovare le basi degli autospazi e dire se $A$ è diagonalizzabile.

(d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad $A$? (*la risposta deve essere giustificata*)

**Esercizio 2.** Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia $U$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, -2, 0)$, $u_2 = (4, 0, -5, 3)$.

(a) Trovare una base ortogonale di $U$.

(b) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^\perp$ e trovare una sua base.

(c) Dato $v = (6, 2, -4, 2) \in \mathbb{R}^4$ determinare la sua proiezione ortogonale su $U$.

(d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di $v$ su $W$ sia il vettore $w = (3, 1, -4, 0)$.

**Esercizio 3.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo i piani

$$\pi : x - y + 2z + 1 = 0, \qquad \sigma_\alpha : 2x + \alpha y + (2 - \alpha)z + \alpha = 0.$$

(a) Determinare il valore di $\alpha$ per cui i piani $\sigma_\alpha$ e $\pi$ sono paralleli. Per tale valore di $\alpha$ calcolare la distanza tra i piani $\pi$ e $\sigma_\alpha$.

(b) Determinare il valore di $\alpha$ per cui le rette ortogonali al piano $\sigma_\alpha$ sono parallele al piano $\pi$.

(c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.

(d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1, 2, 0) \in \pi$ trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per $P$ e $S$ sia ortogonale a $\pi$.

**D**

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**2° Compitino — 14 giugno 2022**

---

**Esercizio 1.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 4 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di $A$.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $A$.

(c) Trovare le basi degli autospazi e dire se $A$ è diagonalizzabile.

(d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad $A$? (*la risposta deve essere giustificata*)

**Esercizio 2.** Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia $U$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -2, 0, -1)$, $u_2 = (0, 5, -2, 2)$.

(a) Trovare una base ortogonale di $U$.

(b) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^\perp$ e trovare una sua base.

(c) Dato $v = (3, 3, 0, 3) \in \mathbb{R}^4$ determinare la sua proiezione ortogonale su $U$.

(d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di $v$ su $W$ sia il vettore $w = (1, -1, 2, 1)$.

**Esercizio 3.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo i piani

$$\pi : x - 2y + z - 2 = 0, \qquad \sigma_\alpha : \alpha x + (3 - \alpha)y - 3z + \alpha = 0.$$

(a) Determinare il valore di $\alpha$ per cui i piani $\sigma_\alpha$ e $\pi$ sono paralleli. Per tale valore di $\alpha$ calcolare la distanza tra i piani $\pi$ e $\sigma_\alpha$.

(b) Determinare il valore di $\alpha$ per cui le rette ortogonali al piano $\sigma_\alpha$ sono parallele al piano $\pi$.

(c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.

(d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1, 0, 1) \in \pi$ trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per $P$ e $S$ sia ortogonale a $\pi$.