A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2° appello — 5 luglio 2022

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazione $2x_1 - x_4 = 0$ e sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (-1, 2, 1, 0)$ e $w_2 = (1, 0, 0, 1)$.

(a) Scrivere una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Trovare una base ortogonale di W.

(c) Scrivere le equazioni cartesiane di W e trovare una base di $U \cap W$.

(d) Dato $v = (3, -1, 2, 1)$ determinare la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U.

Esercizio 2. Sia $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -t \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & -4 & t & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una forma a scala di A e determinare il valore di t per cui $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$.

(b) Per il valore di t trovato al punto (a) si scriva una base di $\operatorname{Ker}(f)$ e una base di $\operatorname{Im}(f)$.

(c) Poniamo $t = 0$. Si scriva la matrice di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, 1)$ $v_3 = (1, 0, 1, 1)$, $v_4 = (0, 1, 1, 1)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Poniamo $t = 0$. È possibile trovare delle basi di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice di f abbia la prima riga uguale alla seconda riga? (*la risposta deve essere motivata*)

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ t & 2 & t \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(b) Determinare per quale valore di t la matrice è diagonalizzabile. Per tale valore di t trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

(c) Si dica se la matrice $B = A \cdot A^T$ è diagonalizzabile per ogni valore di t (*la risposta deve essere motivata e NON è necessario calcolare il prodotto* $A \cdot A^T$)

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo il piano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$.

(a) Trovare il punto $A' \in \pi$ di minima distanza da $A = (3, 3, 0)$.

(b) Sia $B = (0, -1, 1) \in \pi$. Scrivere l'equazione del piano σ parallelo a π e passante per il punto medio del segmento AB.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta s contenuta nel piano π, passante per il punto $B = (0, -1, 1)$ e tale che $\operatorname{dist}(A, s) = \operatorname{dist}(A, B)$.

(d) Sia r_1 la retta passante per il punto A e parallela al vettore $w = (1, 1, 0)$. Sia r_2 la retta passante per il punto B e parallela a r_1. Calcolare la distanza $\operatorname{dist}(r_1, r_2)$.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2º appello — 5 luglio 2022

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazione $x_2 + 3x_4 = 0$ e sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (0, 2, 1, 0)$ e $w_2 = (2, 1, 0, -1)$.

(a) Scrivere una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Trovare una base ortogonale di W.

(c) Scrivere le equazioni cartesiane di W e trovare una base di $U \cap W$.

(d) Dato $v = (1, -2, -1, 4)$ determinare la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & t & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -t \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una forma a scala di A e determinare il valore di t per cui $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$.

(b) Per il valore di t trovato al punto (a) si scriva una base di $\operatorname{Ker}(f)$ e una base di $\operatorname{Im}(f)$.

(c) Poniamo $t = 0$. Si scriva la matrice di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, 1)$ $v_3 = (1, 0, 1, 1)$, $v_4 = (0, 1, 1, 1)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Poniamo $t = 0$. È possibile trovare delle basi di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice di f abbia la prima riga uguale alla seconda riga? (*la risposta deve essere motivata*)

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & t & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -t & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(b) Determinare per quale valore di t la matrice è diagonalizzabile. Per tale valore di t trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

(c) Si dica se la matrice $B = A \cdot A^T$ è diagonalizzabile per ogni valore di t (*la risposta deve essere motivata e NON è necessario calcolare il prodotto* $A \cdot A^T$)

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo il piano $\pi : 2x - y + z + 3 = 0$.

(a) Trovare il punto $A' \in \pi$ di minima distanza da $A = (2, -2, 3)$.

(b) Sia $B = (0, 2, -1) \in \pi$. Scrivere l'equazione del piano σ parallelo a π e passante per il punto medio del segmento AB.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta s contenuta nel piano π, passante per il punto $B = (0, 2, -1)$ e tale che $\operatorname{dist}(A, s) = \operatorname{dist}(A, B)$.

(d) Sia r_1 la retta passante per il punto A e parallela al vettore $w = (1, 0, 1)$. Sia r_2 la retta passante per il punto B e parallela a r_1. Calcolare la distanza $\operatorname{dist}(r_1, r_2)$.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2$^{\text{o}}$ appello — 5 luglio 2022

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazione $2x_2 + x_4 = 0$ e sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1,1,0,2)$ e $w_2 = (0,2,1,0)$.

(a) Scrivere una base di U e una base di $U^{\perp}$.

(b) Trovare una base ortogonale di W.

(c) Scrivere le equazioni cartesiane di W e trovare una base di $U \cap W$.

(d) Dato $v = (1,1,2,3)$ determinare la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & t & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una forma a scala di A e determinare il valore di t per cui $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$.

(b) Per il valore di t trovato al punto (a) si scriva una base di $\operatorname{Ker}(f)$ e una base di $\operatorname{Im}(f)$.

(c) Poniamo $t = 0$. Si scriva la matrice di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (1,1,0,1)$ $v_3 = (1,0,1,1)$, $v_4 = (0,1,1,1)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Poniamo $t = 0$. È possibile trovare delle basi di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice di f abbia la prima riga uguale alla seconda riga? (*la risposta deve essere motivata*)

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ t & -1 & t \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(b) Determinare per quale valore di t la matrice è diagonalizzabile. Per tale valore di t trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

(c) Si dica se la matrice $B = A \cdot A^T$ è diagonalizzabile per ogni valore di t (*la risposta deve essere motivata e NON è necessario calcolare il prodotto* $A \cdot A^T$)

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo il piano $\pi : x - 2y + 2z + 5 = 0$.

(a) Trovare il punto $A' \in \pi$ di minima distanza da $A = (1,-3,3)$.

(b) Sia $B = (-3,1,0) \in \pi$. Scrivere l'equazione del piano σ parallelo a π e passante per il punto medio del segmento AB.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta s contenuta nel piano π, passante per il punto $B = (-3,1,0)$ e tale che $\operatorname{dist}(A,s) = \operatorname{dist}(A,B)$.

(d) Sia r_1 la retta passante per il punto A e parallela al vettore $w = (0,1,-1)$. Sia r_2 la retta passante per il punto B e parallela a r_1. Calcolare la distanza $\operatorname{dist}(r_1, r_2)$.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2$^{\text{o}}$ appello — 5 luglio 2022

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazione $x_2 - 3x_4 = 0$ e sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 2, 0, 0)$ e $w_2 = (0, 1, -2, 1)$.

(a) Scrivere una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Trovare una base ortogonale di W.

(c) Scrivere le equazioni cartesiane di W e trovare una base di $U \cap W$.

(d) Dato $v = (2, -2, 1, -4)$ determinare la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & t & 3 \\ 1 & 0 & -1 & t \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una forma a scala di A e determinare il valore di t per cui $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$.

(b) Per il valore di t trovato al punto (a) si scriva una base di $\operatorname{Ker}(f)$ e una base di $\operatorname{Im}(f)$.

(c) Poniamo $t = 0$. Si scriva la matrice di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, 1)$ $v_3 = (1, 0, 1, 1)$, $v_4 = (0, 1, 1, 1)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Poniamo $t = 0$. È possibile trovare delle basi di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice di f abbia la prima riga uguale alla seconda riga? (*la risposta deve essere motivata*)

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -t & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(b) Determinare per quale valore di t la matrice è diagonalizzabile. Per tale valore di t trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

(c) Si dica se la matrice $B = A \cdot A^T$ è diagonalizzabile per ogni valore di t (*la risposta deve essere motivata e NON è necessario calcolare il prodotto* $A \cdot A^T$)

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo il piano $\pi : 2x + 2y - z + 5 = 0$.

(a) Trovare il punto $A' \in \pi$ di minima distanza da $A = (4, 2, -1)$.

(b) Sia $B = (-3, 0, -1) \in \pi$. Scrivere l'equazione del piano σ parallelo a π e passante per il punto medio del segmento AB.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta s contenuta nel piano π, passante per il punto $B = (-3, 0, -1)$ e tale che $\operatorname{dist}(A, s) = \operatorname{dist}(A, B)$.

(d) Sia r_1 la retta passante per il punto A e parallela al vettore $w = (1, 0, -1)$. Sia r_2 la retta passante per il punto B e parallela a r_1. Calcolare la distanza $\operatorname{dist}(r_1, r_2)$.