ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

A

3º appello — 1 settembre 2022

Esercizio 1. Identifichiamo $\mathbb{R}^4$ con lo spazio vettoriale V dei polinomi di grado ≤ 3 associando a un vettore $v = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ di $\mathbb{R}^4$ il polinomio $p_v(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.

(a) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio formato dai vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che il corrispondente polinomio $p_v(X)$ si annulla per $X = 1$: $U = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid p_v(1) = 0 \}$. Determinare la dimensione e una base di U.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (2, 0, 0, 1)$ e $w_2 = (1, 0, -2, 0)$. Verificare che per ogni $w \in W$ il corrispondente polinomio $p_w(X)$ è tale che la sua derivata si annulla per $X = 0$.

Si dica se tutti i polinomi $f(X) \in V$ tali che $f'(0) = 0$ sono del tipo $f(X) = p_w(X)$, per qualche vettore $w \in W$.

(c) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.

(d) Dire se esistono due sottospazi $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^4$ tali che $W \oplus V_1 = \mathbb{R}^4$, $W \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$ e anche $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$. In caso di risposta affermativa scrivere delle basi di tali sottospazi.

Esercizio 2. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base del suo ortogonale $(\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(b) Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice rispetto alla base canonica è la matrice trasposta di A. Trovare una base di $\operatorname{Im} g$ e verificare che $\operatorname{Im} g = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(c) Per quale valore di t il vettore $v = (1, t, -1)$ appartiene all'immagine di f? Per tale valore di t si determini l'antiimmagine $f^{-1}(v)$.

(d) Consideriamo ora la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, ove $u_1 = e_3$, $u_2 = e_2$, $u_3 = e_1$. Quale è la matrice di f rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$?

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per il quale la funzione lineare rappresentata dalla matrice A **non è** iniettiva.

(b) Ora poniamo $t = 3$. Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Sempre per $t = 3$, determinare una base degli autospazi di A. Si dica se è possibile trovare una matrice diagonale D simile ad A.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo il piano $\pi : 2x - y + z = 0$ e la retta r di equazioni $3x - z - 5 = 0$ e $y = 0$.

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ che contiene la retta r e forma un angolo retto con π.

(b) Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta r' passante per A, contenuta nel piano π e perpendicolare alla retta r.

(c) Sia $P = (1, -1, 3)$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P, parallela al piano π e incidente la retta r.

(d) Trovare un punto R sulla retta r tale che $\operatorname{dist}(P, R) = \operatorname{dist}(P, \pi)$ [*ci sono due punti che soddisfano questa richiesta, è sufficiente trovarne uno*].

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA **B**

3° appello — 1 settembre 2022

Esercizio 1. Identifichiamo $\mathbb{R}^4$ con lo spazio vettoriale V dei polinomi di grado ≤ 3 associando a un vettore $v = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ di $\mathbb{R}^4$ il polinomio $p_v(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.

(a) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio formato dai vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che il corrispondente polinomio $p_v(X)$ si annulla per $X = -1$: $U = \{\, v \in \mathbb{R}^4 \mid p_v(-1) = 0 \,\}$. Determinare la dimensione e una base di U.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (2, 0, 1, 0)$ e $w_2 = (-1, 0, 0, 3)$. Verificare che per ogni $w \in W$ il corrispondente polinomio $p_w(X)$ è tale che la sua derivata si annulla per $X = 0$.

Si dica se tutti i polinomi $f(X) \in V$ tali che $f'(0) = 0$ sono del tipo $f(X) = p_w(X)$, per qualche vettore $w \in W$.

(c) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.

(d) Dire se esistono due sottospazi $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^4$ tali che $W \oplus V_1 = \mathbb{R}^4$, $W \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$ e anche $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$. In caso di risposta affermativa scrivere delle basi di tali sottospazi.

Esercizio 2. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base del suo ortogonale $(\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(b) Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice rispetto alla base canonica è la matrice trasposta di A. Trovare una base di $\operatorname{Im} g$ e verificare che $\operatorname{Im} g = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(c) Per quale valore di t il vettore $v = (0, t, -3)$ appartiene all'immagine di f? Per tale valore di t si determini l'antiimmagine $f^{-1}(v)$.

(d) Consideriamo ora la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, ove $u_1 = e_3$, $u_2 = e_2$, $u_3 = e_1$. Quale è la matrice di f rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$?

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & t \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per il quale la funzione lineare rappresentata dalla matrice A **non è** iniettiva.

(b) Ora poniamo $t = 1$. Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Sempre per $t = 1$, determinare una base degli autospazi di A. Si dica se è possibile trovare una matrice diagonale D simile ad A.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo il piano $\pi : x + y - 2z = 0$ e la retta r di equazioni $x = 0$ e $3y + z - 7 = 0$.

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ che contiene la retta r e forma un angolo retto con π.

(b) Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta r' passante per A, contenuta nel piano π e perpendicolare alla retta r.

(c) Sia $P = (2, 2, -1)$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P, parallela al piano π e incidente la retta r.

(d) Trovare un punto R sulla retta r tale che $\operatorname{dist}(P, R) = \operatorname{dist}(P, \pi)$ [*ci sono due punti che soddisfano questa richiesta, è sufficiente trovarne uno*].

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

C

3^o appello — 1 settembre 2022

Esercizio 1. Identifichiamo $\mathbb{R}^4$ con lo spazio vettoriale V dei polinomi di grado ≤ 3 associando a un vettore $v = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ di $\mathbb{R}^4$ il polinomio $p_v(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$.

(a) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio formato dai vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che il corrispondente polinomio $p_v(X)$ si annulla per $X = 1$: $U = \{\, v \in \mathbb{R}^4 \mid p_v(1) = 0 \,\}$. Determinare la dimensione e una base di U.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (3, 0, 0, -1)$ e $w_2 = (-1, 0, 2, 0)$. Verificare che per ogni $w \in W$ il corrispondente polinomio $p_w(X)$ è tale che la sua derivata si annulla per $X = 0$.

Si dica se tutti i polinomi $f(X) \in V$ tali che $f'(0) = 0$ sono del tipo $f(X) = p_w(X)$, per qualche vettore $w \in W$.

(c) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.

(d) Dire se esistono due sottospazi $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^4$ tali che $W \oplus V_1 = \mathbb{R}^4$, $W \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$ e anche $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$. In caso di risposta affermativa scrivere delle basi di tali sottospazi.

Esercizio 2. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base del suo ortogonale $(\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(b) Sia $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice rispetto alla base canonica è la matrice trasposta di A. Trovare una base di $\operatorname{Im} g$ e verificare che $\operatorname{Im} g = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(c) Per quale valore di t il vettore $v = (3, t, 3)$ appartiene all'immagine di f? Per tale valore di t si determini l'antiimmagine $f^{-1}(v)$.

(d) Consideriamo ora la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, ove $u_1 = e_3$, $u_2 = e_2$, $u_3 = e_1$. Quale è la matrice di f rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$?

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per il quale la funzione lineare rappresentata dalla matrice A **non è** iniettiva.

(b) Ora poniamo $t = -1$. Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Sempre per $t = -1$, determinare una base degli autospazi di A. Si dica se è possibile trovare una matrice diagonale D simile ad A.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo il piano $\pi : 2x + y - z = 0$ e la retta r di equazioni $x - 3y + 7 = 0$ e $z = 0$.

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ che contiene la retta r e forma un angolo retto con π.

(b) Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta r' passante per A, contenuta nel piano π e perpendicolare alla retta r.

(c) Sia $P = (3, 1, 1)$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P, parallela al piano π e incidente la retta r.

(d) Trovare un punto R sulla retta r tale che $\operatorname{dist}(P, R) = \operatorname{dist}(P, \pi)$ [*ci sono due punti che soddisfano questa richiesta, è sufficiente trovarne uno*].

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

D

3º appello — 1 settembre 2022

Esercizio 1. Identifichiamo $\mathbb{R}^4$ con lo spazio vettoriale V dei polinomi di grado ≤ 3 associando a un vettore $v = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ di $\mathbb{R}^4$ il polinomio $p_v(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$.

(a) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio formato dai vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che il corrispondente polinomio $p_v(X)$ si annulla per $X = -1$: $U = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid p_v(-1) = 0 \}$. Determinare la dimensione e una base di U.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (-1, 0, 2, 0)$ e $w_2 = (3, 0, 0, -2)$. Verificare che per ogni $w \in W$ il corrispondente polinomio $p_w(X)$ è tale che la sua derivata si annulla per $X = 0$.

Si dica se tutti i polinomi $f(X) \in V$ tali che $f'(0) = 0$ sono del tipo $f(X) = p_w(X)$, per qualche vettore $w \in W$.

(c) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.

(d) Dire se esistono due sottospazi $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^4$ tali che $W \oplus V_1 = \mathbb{R}^4$, $W \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$ e anche $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$. In caso di risposta affermativa scrivere delle basi di tali sottospazi.

Esercizio 2. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base del suo ortogonale $(\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(b) Sia $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice rispetto alla base canonica è la matrice trasposta di A. Trovare una base di $\operatorname{Im} g$ e verificare che $\operatorname{Im} g = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(c) Per quale valore di t il vettore $v = (1, t, 5)$ appartiene all'immagine di f? Per tale valore di t si determini l'antiimmagine $f^{-1}(v)$.

(d) Consideriamo ora la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, ove $u_1 = e_3$, $u_2 = e_2$, $u_3 = e_1$. Quale è la matrice di f rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$?

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per il quale la funzione lineare rappresentata dalla matrice A **non è** iniettiva.

(b) Ora poniamo $t = 4$. Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Sempre per $t = 4$, determinare una base degli autospazi di A. Si dica se è possibile trovare una matrice diagonale D simile ad A.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo il piano $\pi : x - 2y + z = 0$ e la retta r di equazioni $x = 0$ e $y - 2z + 3 = 0$.

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ che contiene la retta r e forma un angolo retto con π.

(b) Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta r' passante per A, contenuta nel piano π e perpendicolare alla retta r.

(c) Sia $P = (2, -2, 0)$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P, parallela al piano π e incidente la retta r.

(d) Trovare un punto R sulla retta r tale che $\operatorname{dist}(P, R) = \operatorname{dist}(P, \pi)$ [*ci sono due punti che soddisfano questa richiesta, è sufficiente trovarne uno*].