**A**

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**1° Compitino — 22 aprile 2023**

---

**Esercizio 1.** In $\mathbb{R}^4$ sia $U$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -1, 2)$, $u_2 = (0, 2, -1, 1)$, $u_3 = (3, -4, -1, 4)$, $u_4 = (2, -6, 1, t)$.

(a) Per quale valore di $t$ si ha $\dim U = 2$?

(b) Ora si ponga $t = 0$, per tutto il resto dell'esercizio. Verificare che $\dim U = 3$ e trovare una base di $U$.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Trovare una base di $W$ e una base di $U \cap W$.

(d) Esiste una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(U) = W$? Se una tale $f$ esiste è possibile che sia iniettiva?

**Esercizio 2.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x - 2y - z, -x + 2z, 2x - 6y - z).$$

(a) Scrivere la matrice $A$ di $f$ rispetto alla base canonica.

(b) Ridurre $A$ in forma a scala e trovare una matrice invertibile $R$ tale che la matrice $A' = RA$ sia una forma a scala di $A$.

(c) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(d) Scrivere la matrice $B$ di $f$ rispetto alla base formata dai vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ (usiamo questa base sia nel dominio che nel codominio di $f$).

**Esercizio 3.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & t & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Ridurre $A$ in forma a scala e determinare il suo rango al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Consideriamo il vettore colonna $B_1 = (3, -1, 4, 2)$. Esiste un valore di $t$ per il quale il sistema $AX = B_1$ ha soluzione?

(c) Poniamo ora $t = 2$. Determinare l'insieme $S$ delle soluzioni del sistema $AX = B_2$, ove $B_2 = (2, -3, 0, -2)$. L'insieme $S$ così trovato è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?

**B**

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**1^o^ Compitino — 22 aprile 2023**

---

**Esercizio 1.** In $\mathbb{R}^4$ sia $U$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, 2, -1)$, $u_2 = (0, -1, 2, -2)$, $u_3 = (3, 2, 2, 1)$, $u_4 = (2, 3, -2, t)$.

(a) Per quale valore di $t$ si ha $\dim U = 2$ ?

(b) Ora si ponga $t = 0$, per tutto il resto dell'esercizio. Verificare che $\dim U = 3$ e trovare una base di $U$.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_2 = 0$, $x_4 = 0$. Trovare una base di $W$ e una base di $U \cap W$.

(d) Esiste una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(U) = W$ ? Se una tale $f$ esiste è possibile che sia iniettiva?

**Esercizio 2.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + z, -x + 6y - 2z).$$

(a) Scrivere la matrice $A$ di $f$ rispetto alla base canonica.

(b) Ridurre $A$ in forma a scala e trovare una matrice invertibile $R$ tale che la matrice $A' = RA$ sia una forma a scala di $A$.

(c) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(d) Scrivere la matrice $B$ di $f$ rispetto alla base formata dai vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ (usiamo questa base sia nel dominio che nel codominio di $f$).

**Esercizio 3.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & t & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Ridurre $A$ in forma a scala e determinare il suo rango al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Consideriamo il vettore colonna $B_1 = (2, 1, -3, 2)$. Esiste un valore di $t$ per il quale il sistema $AX = B_1$ ha soluzione?

(c) Poniamo ora $t = 2$. Determinare l'insieme $S$ delle soluzioni del sistema $AX = B_2$, ove $B_2 = (3, 2, 5, 2)$. L'insieme $S$ così trovato è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ ?

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

## 1º Compitino — 22 aprile 2023

---

**Esercizio 1.** In $\mathbb{R}^4$ sia $U$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, 1, 3)$, $u_2 = (0, 1, -1, 3)$, $u_3 = (3, -2, 5, 3)$, $u_4 = (2, -3, 5, t)$.

(a) Per quale valore di $t$ si ha $\dim U = 2$?

(b) Ora si ponga $t = 0$, per tutto il resto dell'esercizio. Verificare che $\dim U = 3$ e trovare una base di $U$.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 = 0$, $x_4 = 0$. Trovare una base di $W$ e una base di $U \cap W$.

(d) Esiste una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(U) = W$? Se una tale $f$ esiste è possibile che sia iniettiva?

**Esercizio 2.** Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, -2x - z, x - 3y + 5z).$$

(a) Scrivere la matrice $A$ di $f$ rispetto alla base canonica.

(b) Ridurre $A$ in forma a scala e trovare una matrice invertibile $R$ tale che la matrice $A' = RA$ sia una forma a scala di $A$.

(c) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(d) Scrivere la matrice $B$ di $f$ rispetto alla base formata dai vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ (usiamo questa base sia nel dominio che nel codominio di $f$).

**Esercizio 3.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & t & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Ridurre $A$ in forma a scala e determinare il suo rango al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Consideriamo il vettore colonna $B_1 = (3, -2, 1, 1)$. Esiste un valore di $t$ per il quale il sistema $AX = B_1$ ha soluzione?

(c) Poniamo ora $t = 3$. Determinare l'insieme $S$ delle soluzioni del sistema $AX = B_2$, ove $B_2 = (1, 2, 7, 5)$. L'insieme $S$ così trovato è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?

**D**

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**1º Compitino — 22 aprile 2023**

---

**Esercizio 1.** In $\mathbb{R}^4$ sia $U$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -3, 1)$, $u_2 = (0, 1, -3, 1)$, $u_3 = (3, -2, -3, 1)$, $u_4 = (2, -3, 3, t)$.

(a) Per quale valore di $t$ si ha $\dim U = 2$ ?

(b) Ora si ponga $t = 0$, per tutto il resto dell'esercizio. Verificare che $\dim U = 3$ e trovare una base di $U$.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_2 = 0$, $x_4 = 0$. Trovare una base di $W$ e una base di $U \cap W$.

(d) Esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(U) = W$ ? Se una tale $f$ esiste è possibile che sia iniettiva?

**Esercizio 2.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, -x + 3z, 2x + 3y - 3z).$$

(a) Scrivere la matrice $A$ di $f$ rispetto alla base canonica.

(b) Ridurre $A$ in forma a scala e trovare una matrice invertibile $R$ tale che la matrice $A' = RA$ sia una forma a scala di $A$.

(c) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(d) Scrivere la matrice $B$ di $f$ rispetto alla base formata dai vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ (usiamo questa base sia nel dominio che nel codominio di $f$).

**Esercizio 3.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & t & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Ridurre $A$ in forma a scala e determinare il suo rango al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Consideriamo il vettore colonna $B_1 = (1, -2, 2, 3)$. Esiste un valore di $t$ per il quale il sistema $AX = B_1$ ha soluzione?

(c) Poniamo ora $t = -2$. Determinare l'insieme $S$ delle soluzioni del sistema $AX = B_2$, ove $B_2 = (2, 4, -2, -6)$. L'insieme $S$ così trovato è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ ?