A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2$^{\text{o}}$ Compitino — 20 giugno 2023

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & t \\ -3 & -5 & 6 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui A **non** è invertibile.

(b) Ora si ponga $t = 2$ per tutto il resto dell'esercizio. Determinare il valore di a per il quale il vettore $v = (2, 0, a)$ è un autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(c) Determinare tutti gli autovalori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale.

(d) Si dica se A è simile alla matrice A^2 (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 2, 0, -1)$, $u_2 = (0, -4, 3, 4)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale di $v = (0, 5, 3, 4)$ su U.

(d) Sia $w = (2, -1, 0, 2)$. Si dica se esiste un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di w su L sia il vettore $\ell = (1, 1, 2, 0)$.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo le due rette

$$r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente la retta s e parallelo a r.

(c) Dato il punto $R = (0, 1, -1) \in r$ trovare un punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia parallela al piano di equazione $3x - z = 0$.

(d) Consideriamo la famiglia di piani $\pi_t : z = t$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $R_t = r \cap \pi_t$ e $S_t = s \cap \pi_t$. Sia M_t il punto medio del segmento di estremi R_t e S_t. Verificare che i punti M_t si trovano tutti su una stessa retta e scrivere le equazioni parametriche di tale retta.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2^{o} Compitino — 20 giugno 2023

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & t & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui A **non** è invertibile.

(b) Ora si ponga $t = -5$ per tutto il resto dell'esercizio. Determinare il valore di a per il quale il vettore $v = (0, 1, a)$ è un autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(c) Determinare tutti gli autovalori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale.

(d) Si dica se A è simile alla matrice A^2 (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 0, -1, 1)$, $u_2 = (3, 1, -1, 5)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale di $v = (4, 2, -1, -3)$ su U.

(d) Sia $w = (3, -1, 2, 2)$. Si dica se esiste un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di w su L sia il vettore $\ell = (1, 0, 1, 2)$.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo le due rette

$$r : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente la retta s e parallelo a r.

(c) Dato il punto $R = (1, 0, 1) \in r$ trovare un punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia parallela al piano di equazione $x + y = 0$.

(d) Consideriamo la famiglia di piani $\pi_t : z = t$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $R_t = r \cap \pi_t$ e $S_t = s \cap \pi_t$. Sia M_t il punto medio del segmento di estremi R_t e S_t. Verificare che i punti M_t si trovano tutti su una stessa retta e scrivere le equazioni parametriche di tale retta.

C

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2^{o} Compitino — 20 giugno 2023

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \\ t & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui A **non** è invertibile.

(b) Ora si ponga $t = 6$ per tutto il resto dell'esercizio. Determinare il valore di a per il quale il vettore $v = (1, -1, a)$ è un autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(c) Determinare tutti gli autovalori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale.

(d) Si dica se A è simile alla matrice A^2 (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (0, 1, 1, -2)$, $u_2 = (2, -3, 1, 5)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale di $v = (1, 3, 5, 1)$ su U.

(d) Sia $w = (2, -1, 2, 3)$. Si dica se esiste un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di w su L sia il vettore $\ell = (1, 2, 0, 1)$.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ consideriamo le due rette

$$r : \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2z + 4 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente la retta s e parallelo a r.

(c) Dato il punto $R = (2, -1, 0) \in r$ trovare un punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia parallela al piano di equazione $x + z = 0$.

(d) Consideriamo la famiglia di piani $\pi_t : z = t$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $R_t = r \cap \pi_t$ e $S_t = s \cap \pi_t$. Sia M_t il punto medio del segmento di estremi R_t e S_t. Verificare che i punti M_t si trovano tutti su una stessa retta e scrivere le equazioni parametriche di tale retta.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2$^{\text{o}}$ Compitino — 20 giugno 2023

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & t \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui A **non** è invertibile.

(b) Ora si ponga $t = 3$ per tutto il resto dell'esercizio. Determinare il valore di a per il quale il vettore $v = (-1, 2, a)$ è un autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(c) Determinare tutti gli autovalori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale.

(d) Si dica se A è simile alla matrice A^2 (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -2, -1, 0)$, $u_2 = (1, -3, -5, 1)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale di $v = (3, -2, 1, -4)$ su U.

(d) Sia $w = (1, 3, -2, 1)$. Si dica se esiste un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di w su L sia il vettore $\ell = (2, 0, 1, -1)$.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ consideriamo le due rette

$$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente la retta s e parallelo a r.

(c) Dato il punto $R = (2, 0, -1) \in r$ trovare un punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia parallela al piano di equazione $2x + y = 0$.

(d) Consideriamo la famiglia di piani $\pi_t : z = t$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $R_t = r \cap \pi_t$ e $S_t = s \cap \pi_t$. Sia M_t il punto medio del segmento di estremi R_t e S_t. Verificare che i punti M_t si trovano tutti su una stessa retta e scrivere le equazioni parametriche di tale retta.