A

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2^{o} appello — 11 luglio 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 1, 0, -2)$, $u_2 = (2, 0, 1, -1)$, $u_3 = (1, -3, 2, 4)$.

(a) Determinare la dimensione e una base **ortogonale** di U.

(b) Scrivere una base di $U^\perp$.

(c) Sia $w = (1, -2, -1, 0)$ e sia $W = \langle w\rangle^\perp$. Scrivere una base di W.

(d) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.

(e) Sia P la matrice (quadrata di ordine 4) della proiezione ortogonale su U, cioè la matrice tale che, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$, il vettore $v' = Pv$ è la proiezione ortogonale di v su U. Spiegare perché si ha $P^2 = P$.

Soluzione. (a) I vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti, infatti si ha $u_3 = 2u_2 - 3u_1$, quindi una base di U è formata dai vettori u_1 e u_2. Per trovare una base ortogonale di U poniamo $u_1' = u_1$ e $u_2' = u_2 + \alpha u_1'$. Richiedendo che sia $u_1' \cdot u_2' = 0$ si trova $\alpha = -2/3$, quindi

$$u_2' = u_2 - \frac{2}{3}u_1' = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$$

I vettori u_1' e u_2' sono una base ortogonale di U.

(b) I vettori di $U^\perp$ devono essere ortogonali ai vettori u_1 e u_2. Da ciò segue che le equazioni cartesiane di $U^\perp$ sono

$$U^\perp : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Da queste equazioni si ricava

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 + 2x_4 \\ x_3 = -2x_1 + x_4 \end{cases}$$

quindi una base di $U^\perp$ è formata dai due vettori $(1, -1, -2, 0)$ e $(0, 2, 1, 1)$.

(c) I vettori di W devono essere ortogonali al vettore w, quindi l'equazione cartesiana di W è $x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$, da cui si ricava $x_1 = 2x_2 + x_3$. Di conseguenza $\dim W = 3$ e una sua base è formata dai vettori $w_1 = (2, 1, 0, 0)$, $w_2 = (1, 0, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 0, 1)$.

(d) Il generico vettore di U è $u = au_1 + bu_2 = (a + 2b, a, b, -2a - b)$. Questo vettore appartiene anche a W se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione di W. Si ha quindi $a+2b-2a-b = 0$, da cui si ricava $a = b$. Da ciò si deduce che $\dim(U \cap W) = 1$ e una base di $U \cap W$ è formata dal vettore $(3, 1, 1, -3)$.

(e) Per ogni $v \in \mathbb{R}^4$ si ha $v' = Pv \in U$. Dato che $v' \in U$ la sua proiezione ortogonale su U è lo stesso vettore v', cioè $Pv' = v'$. Questo significa che $Pv = v' = Pv' = P(Pv) = P^2v$, cioè $Pv = P^2v$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$. Da ciò segue che deve essere $P = P^2$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(b) Trovare per quale valore di t il vettore $v = (1, 1, t, 1)$ appartiene all'immagine di f. Per tale valore di t determinare l'antiimmagine di v.

(c) Trovare una base di un sottospazio U, di dimensione 3, tale che la funzione $f|_U : U \to \mathbb{R}^4$, $u \mapsto f(u)$, sia iniettiva.

(d) Sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 0, -1, 0)$ e $w_2 = (0, 1, 0, -1)$. Verificare che per ogni $w \in W$ si ha $f(w) \in W$. Sia $g\colon W \to W$ la funzione definita ponendo $g(w) = f(w)$. Scrivere la matrice di g rispetto alla base $\{w_1, w_2\}$ di W.

Soluzione. (a) Riducendo la matrice A in forma a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue che A ha rango 3, quindi $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$ e una base dell'immagine di f è formata dalla prime tre colonne di A. Una base del nucleo di f si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

Da ciò si deduce che una base di $\operatorname{Ker} f$ è costituita dal vettore $\ell = (1, 0, 1, 1)$.

(b) Se riduciamo in forma a scala la matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & t \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

si ottiene la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-t \end{array}\right)$$

da cui segue che $v \in \operatorname{Im} f$ se e solo se $t = 1$. Per tale valore di t l'insieme $f^{-1}(v)$ è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x_1 = -1/3 + x_4 \\ x_2 = 1/3 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

(c) La restrizione di f a U è iniettiva se l'unico vettore $u \in U$ tale che $f(u) = 0$ è il vettore nullo $u = 0$, quindi U deve avere la proprietà che $U \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Una base di U deve quindi essere formata da 3 vettori u_1, u_2, u_3 tali che $\{\ell, u_1, u_2, u_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$. Una possibile base di U è quindi data dai vettori $u_1 = (0,1,0,0)$, $u_2 = (0,0,1,0)$, $u_3 = (0,0,0,1)$ (è immediato verificare che i vettori ℓ, u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti).

(d) Dato che $\{w_1, w_2\}$ è una base di W, per verificare che $f(w) \in W$ per ogni $w \in W$ è sufficiente verificare che $f(w_1) \in W$ e $f(w_2) \in W$.
Si ha $f(w_1) = Aw_1 = (1,-1,-1,1) = w_1 - w_2 \in W$ e $f(w_2) = Aw_2 = (2,1,-2,-1) = 2w_1 + w_2 \in W$. Da questo calcolo segue anche che la matrice di g rispetto alla base $\{w_1, w_2\}$ di W è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Consideriamo la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Si dica per quale valore di t il vettore $v = (1,-1,t)$ è autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Determinare gli autovettori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale D.

(d) Esiste un sottospazio U di dimensione 2 tale che tutti i vettori di U sono autovettori di A? Se U esiste trovare una sua base, altrimenti spiegare perché un tale sottospazio non esiste.

Soluzione. (a) Affinché v sia autovettore di A si deve avere $Av = \lambda v$. Moltiplicando A per v e sviluppando i calcoli si trova $t = 1$ e $\lambda = 2$. Quindi il vettore $(1,-1,1)$ è un autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda = 2$.

(b) Si ha:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -3 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -3 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ -3 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

da cui si deduce che gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.

(c) Per l'autovalore $\lambda_1 = 1$ si trova l'autovettore $v_1 = (1,0,1)$. Per l'autovalore $\lambda_2 = 2$ si trova l'autovettore $v_2 = (1,-1,1)$, già trovato al punto (a). Per l'autovalore $\lambda_3 = -1$ si trova l'autovettore $v_3 = (0,1,-1)$. Avendo tre autovalori distinti la matrice A è simile ad una matrice diagonale (infatti i tre autovettori trovati sono linearmente indipendenti e formano quindi una base di $\mathbb{R}^3$).

(d) Un sottospazio U con la proprietà che tutti i vettori di U sono autovettori di A è un autospazio della matrice A. Nel punto (c) abbiamo visto che tutti gli autospazi di A hanno dimensione 1, quindi non può esistere un autospazio U di dimensione 2.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $P = (1, 0, 2)$, $Q = (3, -2, 4)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 4z = 2 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

(a) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P e Q. Determinare se esiste un piano che contiene le rette r e s. Se tale piano esiste scrivere la sua equazione cartesiana.

(b) Determinare un punto P' tale che il segmento di estremi P e P' sia ortogonale alla retta r e la retta r intersechi tale segmento nel suo punto medio M.

(c) Sia π il piano di equazione $2x + y - 3z = 0$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ parallelo a π e tale che $\text{dist}(P, \sigma) = \text{dist}(Q, \sigma)$.

Soluzione. (a) Il vettore direttore della retta s è $v_s = Q - P = (2, -2, 2)$. Tale vettore è il doppio del vettore $(1, -1, 1)$, per cui possiamo anche prendere $v_s = (1, -1, 1)$. Le equazioni parametriche di s sono quindi

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Mettendo a sistema le equazioni di r con quelle di s si trova che queste due rette si intersecano nel punto $S = (-2, 3, -1)$, pertanto le rette r e s sono complanari (dato che sono incidenti).
Determiniamo ora un vettore direttore v_r della retta r. Due punti di r sono $R_1 = (2, 1, 0)$ e $R_2 = (6, -1, 1)$, quindi $v_r = R_2 - R_1 = (4, -2, 1)$.
Il vettore perpendicolare al piano che contiene r e s è $n = v_s \times v_r = (1, 3, 2)$, quindi tale piano ha un'equazione del tipo $x + 3y + 2z + d = 0$. Per trovare il valore di d imponiamo la condizione di passaggio per il punto $S = (-2, 3, -1)$. Si trova $d = -5$, quindi il piano che contiene r e s ha equazione $x + 3y + 2z - 5 = 0$.

(b) Il punto M è la proiezione ortogonale di P sulla retta r. Determiniamo quindi il punto M. Indichiamo con X un punto generico della retta r, si ha $X = (2 + 4t, 1 - 2t, t)$. Il vettore $X - P = (1+4t, 1-2t, -2+t)$ deve essere ortogonale al vettore v_r. Imponendo che $(X - P) \cdot v_r = 0$ si trova $t = 0$, da cui segue che il punto M cercato ha coordinate $M = (2, 1, 0)$. Dato che M è il punto medio del segmento PP' si deve avere $M = \frac{P+P'}{2}$, da cui si ricavano le coordinate del punto P'. Si trova $P' = (3, 2, -2)$.

(c) Dato che σ è parallelo al piano π, la sua equazione è del tipo $2x + y - 3z + d = 0$. Si ha:

$$\text{dist}(P, \sigma) = \frac{|-4 + d|}{\sqrt{14}} \qquad \text{dist}(Q, \sigma) = \frac{|-8 + d|}{\sqrt{14}}$$

Richiedendo che $\text{dist}(P, \sigma) = \text{dist}(Q, \sigma)$ si ottiene l'equazione $|d - 4| = |d - 8|$, la cui unica soluzione è $d = 6$. Pertanto l'equazione del piano σ è $2x + y - 3z + 6 = 0$.
(Notiamo che per trovare il valore di d si può anche imporre la condizione che il piano σ passi per il punto medio del segmento PQ).