

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^4$  sia  $U$  il sottospazio le cui equazioni sono 
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

- Trovare una base di  $U$  e poi, dalla base trovata, ricavare una base **ortonormale** di  $U$ .
- Sia  $W = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid w \cdot v = 0\}$ , ove  $v = (1, 0, 0, 1)$ . Verificare che  $U \subset W$  e trovare una base di un sottospazio  $L$  tale che  $U \oplus L = W$ . Se possibile, trovare una base di un altro sottospazio  $L'$  tale che  $U \oplus L' = W$ , ma  $L' \neq L$ .
- Scrivere le equazioni cartesiane di  $U^\perp$  e trovare una sua base.
- Trovare una base di  $U^\perp \cap W$ .

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice  $A_t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -6 & t \end{pmatrix}$ .

- Determinare il rango di  $A_t$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .
- Per tutto il resto dell'esercizio si ponga  $t = 0$ . Sia  $v = (2, \alpha, 2, 3)$ . Trovare il valore di  $\alpha$  per cui il sistema  $A_0 X = v$  ha soluzioni, e trovare tutte le soluzioni di tale sistema.
- Sia  $U$  il sottospazio generato dalle righe di  $A_0$  e  $W$  il sottospazio generato dalle colonne di  $A_0$ . Trovare una base di  $U$  e una base di  $W$ .
- Trovare una base di  $\text{Ker}(A_0^T)$  (ove  $A_0^T$  è la trasposta della matrice  $A_0$ ) e verificare che  $\text{Ker}(A_0^T) = W^\perp$ .

**Esercizio 3.** Sia  $\{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare tale che  $f(e_2) = (2, -2, -3)$ ,  $f(e_3) = (0, 4, 4)$  e il nucleo di  $f$  è generato dal vettore  $(-1, 1, 1)$ .

- Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio).
- Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $f$ .
- Trovare delle basi degli autospazi di  $f$ . È possibile trovare una base di  $\mathbb{R}^3$  tale che la matrice di  $f$  rispetto a questa base sia diagonale?
- Si dica se è possibile trovare una funzione lineare  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la cui matrice abbia l'autovalore  $\lambda = 0$  con molteplicità algebrica 2 e tale che  $\dim(\text{Im } g) = 2$ . La matrice di una tale funzione  $g$  (se esiste) è diagonalizzabile?

**Esercizio 4.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  sono assegnati il punto  $P = (1, 2, -1)$  e la retta  $r$  di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

- Scrivere l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per  $P$  e perpendicolare alla retta  $r$ .
- Scrivere le equazioni parametriche della retta  $s$  passante per  $P$ , incidente la retta  $r$  e perpendicolare al vettore  $u = (1, -1, -1)$ .
- Tra tutte le rette passanti per  $P$  e contenute nel piano  $\pi$  trovare quella di minima distanza dal punto  $A = (1, 3, 4)$  e scriverne le equazioni parametriche.

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^4$  sia  $U$  il sottospazio le cui equazioni sono 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

- Trovare una base di  $U$  e poi, dalla base trovata, ricavare una base **ortonormale** di  $U$ .
- Sia  $W = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid w \cdot v = 0\}$ , ove  $v = (2, 1, 0, 0)$ . Verificare che  $U \subset W$  e trovare una base di un sottospazio  $L$  tale che  $U \oplus L = W$ . Se possibile, trovare una base di un altro sottospazio  $L'$  tale che  $U \oplus L' = W$ , ma  $L' \neq L$ .
- Scrivere le equazioni cartesiane di  $U^\perp$  e trovare una sua base.
- Trovare una base di  $U^\perp \cap W$ .

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice  $A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & t \end{pmatrix}$ .

- Determinare il rango di  $A_t$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .
- Per tutto il resto dell'esercizio si ponga  $t = 0$ . Sia  $v = (1, \alpha, 3, -1)$ . Trovare il valore di  $\alpha$  per cui il sistema  $A_0 X = v$  ha soluzioni, e trovare tutte le soluzioni di tale sistema.
- Sia  $U$  il sottospazio generato dalle righe di  $A_0$  e  $W$  il sottospazio generato dalle colonne di  $A_0$ . Trovare una base di  $U$  e una base di  $W$ .
- Trovare una base di  $\text{Ker}(A_0^T)$  (ove  $A_0^T$  è la trasposta della matrice  $A_0$ ) e verificare che  $\text{Ker}(A_0^T) = W^\perp$ .

**Esercizio 3.** Sia  $\{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare tale che  $f(e_2) = (-1, 2, 3)$ ,  $f(e_3) = (1, -3, -4)$  e il nucleo di  $f$  è generato dal vettore  $(-1, 2, 2)$ .

- Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio).
- Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $f$ .
- Trovare delle basi degli autospazi di  $f$ . È possibile trovare una base di  $\mathbb{R}^3$  tale che la matrice di  $f$  rispetto a questa base sia diagonale?
- Si dica se è possibile trovare una funzione lineare  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la cui matrice abbia l'autovalore  $\lambda = 0$  con molteplicità algebrica 2 e tale che  $\dim(\text{Im } g) = 2$ . La matrice di una tale funzione  $g$  (se esiste) è diagonalizzabile?

**Esercizio 4.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  sono assegnati il punto  $P = (2, 1, 1)$  e la retta  $r$  di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

- Scrivere l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per  $P$  e perpendicolare alla retta  $r$ .
- Scrivere le equazioni parametriche della retta  $s$  passante per  $P$ , incidente la retta  $r$  e perpendicolare al vettore  $u = (2, 2, -1)$ .
- Tra tutte le rette passanti per  $P$  e contenute nel piano  $\pi$  trovare quella di minima distanza dal punto  $A = (1, -4, 2)$  e scriverne le equazioni parametriche.

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^4$  sia  $U$  il sottospazio le cui equazioni sono  $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

- Trovare una base di  $U$  e poi, dalla base trovata, ricavare una base **ortonormale** di  $U$ .
- Sia  $W = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid w \cdot v = 0\}$ , ove  $v = (0, 1, 1, 0)$ . Verificare che  $U \subset W$  e trovare una base di un sottospazio  $L$  tale che  $U \oplus L = W$ . Se possibile, trovare una base di un altro sottospazio  $L'$  tale che  $U \oplus L' = W$ , ma  $L' \neq L$ .
- Scrivere le equazioni cartesiane di  $U^\perp$  e trovare una sua base.
- Trovare una base di  $U^\perp \cap W$ .

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice  $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & t \end{pmatrix}$ .

- Determinare il rango di  $A_t$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .
- Per tutto il resto dell'esercizio si ponga  $t = 0$ . Sia  $v = (0, \alpha, -4, -1)$ . Trovare il valore di  $\alpha$  per cui il sistema  $A_0 X = v$  ha soluzioni, e trovare tutte le soluzioni di tale sistema.
- Sia  $U$  il sottospazio generato dalle righe di  $A_0$  e  $W$  il sottospazio generato dalle colonne di  $A_0$ . Trovare una base di  $U$  e una base di  $W$ .
- Trovare una base di  $\text{Ker}(A_0^T)$  (ove  $A_0^T$  è la trasposta della matrice  $A_0$ ) e verificare che  $\text{Ker}(A_0^T) = W^\perp$ .

**Esercizio 3.** Sia  $\{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare tale che  $f(e_2) = (-2, -1, 0)$ ,  $f(e_3) = (6, 2, -1)$  e il nucleo di  $f$  è generato dal vettore  $(-1, 1, 1)$ .

- Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio).
- Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $f$ .
- Trovare delle basi degli autospazi di  $f$ . È possibile trovare una base di  $\mathbb{R}^3$  tale che la matrice di  $f$  rispetto a questa base sia diagonale?
- Si dica se è possibile trovare una funzione lineare  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la cui matrice abbia l'autovalore  $\lambda = 0$  con molteplicità algebrica 2 e tale che  $\dim(\text{Im } g) = 2$ . La matrice di una tale funzione  $g$  (se esiste) è diagonalizzabile?

**Esercizio 4.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  sono assegnati il punto  $P = (-1, 2, 1)$  e la retta  $r$  di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

- Scrivere l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per  $P$  e perpendicolare alla retta  $r$ .
- Scrivere le equazioni parametriche della retta  $s$  passante per  $P$ , incidente la retta  $r$  e perpendicolare al vettore  $u = (4, -1, 3)$ .
- Tra tutte le rette passanti per  $P$  e contenute nel piano  $\pi$  trovare quella di minima distanza dal punto  $A = (0, 1, 5)$  e scriverne le equazioni parametriche.

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^4$  sia  $U$  il sottospazio le cui equazioni sono 
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

- Trovare una base di  $U$  e poi, dalla base trovata, ricavare una base **ortonormale** di  $U$ .
- Sia  $W = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid w \cdot v = 0\}$ , ove  $v = (1, 0, 2, 0)$ . Verificare che  $U \subset W$  e trovare una base di un sottospazio  $L$  tale che  $U \oplus L = W$ . Se possibile, trovare una base di un altro sottospazio  $L'$  tale che  $U \oplus L' = W$ , ma  $L' \neq L$ .
- Scrivere le equazioni cartesiane di  $U^\perp$  e trovare una sua base.
- Trovare una base di  $U^\perp \cap W$ .

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice  $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & t \end{pmatrix}$ .

- Determinare il rango di  $A_t$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .
- Per tutto il resto dell'esercizio si ponga  $t = 0$ . Sia  $v = (3, \alpha, 6, -1)$ . Trovare il valore di  $\alpha$  per cui il sistema  $A_0 X = v$  ha soluzioni, e trovare tutte le soluzioni di tale sistema.
- Sia  $U$  il sottospazio generato dalle righe di  $A_0$  e  $W$  il sottospazio generato dalle colonne di  $A_0$ . Trovare una base di  $U$  e una base di  $W$ .
- Trovare una base di  $\text{Ker}(A_0^T)$  (ove  $A_0^T$  è la trasposta della matrice  $A_0$ ) e verificare che  $\text{Ker}(A_0^T) = W^\perp$ .

**Esercizio 3.** Sia  $\{e_1, e_2, e_3\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare tale che  $f(e_2) = (-2, 1, 3)$ ,  $f(e_3) = (2, -3, -5)$  e il nucleo di  $f$  è generato dal vettore  $(-1, 2, 2)$ .

- Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio).
- Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $f$ .
- Trovare delle basi degli autospazi di  $f$ . È possibile trovare una base di  $\mathbb{R}^3$  tale che la matrice di  $f$  rispetto a questa base sia diagonale?
- Si dica se è possibile trovare una funzione lineare  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la cui matrice abbia l'autovalore  $\lambda = 0$  con molteplicità algebrica 2 e tale che  $\dim(\text{Im } g) = 2$ . La matrice di una tale funzione  $g$  (se esiste) è diagonalizzabile?

**Esercizio 4.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  sono assegnati il punto  $P = (1, 1, 1)$  e la retta  $r$  di equazioni

$$r : \begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

- Scrivere l'equazione cartesiana del piano  $\pi$  passante per  $P$  e perpendicolare alla retta  $r$ .
- Scrivere le equazioni parametriche della retta  $s$  passante per  $P$ , incidente la retta  $r$  e perpendicolare al vettore  $u = (2, -1, -1)$ .
- Tra tutte le rette passanti per  $P$  e contenute nel piano  $\pi$  trovare quella di minima distanza dal punto  $A = (1, -1, 5)$  e scriverne le equazioni parametriche.