A

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3^o appello — 20 settembre 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio le cui equazioni sono $\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$

(a) Trovare una base di U e poi, dalla base trovata, ricavare una base **ortonormale** di U.

(b) Sia $W = \{w \in \mathbb{R}^4 \,|\, w \cdot v = 0\}$, ove $v = (1, 0, 0, 1)$. Verificare che $U \subset W$ e trovare una base di un sottospazio L tale che $U \oplus L = W$. Se possibile, trovare una base di un altro sottospazio L' tale che $U \oplus L' = W$, ma $L' \neq L$.

(c) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^\perp$ e trovare una sua base.

(d) Trovare una base di $U^\perp \cap W$.

Soluzione. (a) Dalle equazioni di U si ricava

$$U : \begin{cases} x_3 = 2x_1 \\ x_4 = -x_1 \end{cases}$$

da cui si deduce che i vettori $u_1 = (1, 0, 2, -1)$ e $u_2 = (0, 1, 0, 0)$ sono una base di U. Notiamo che $u_1 \cdot u_2 = 0$, quindi u_1 e u_2 sono perpendicolari e quindi formano una base ortogonale. Per ottenere una base ortonormale è sufficiente normalizzare questi due vettori (il vettore u_2 è già normalizzato). Pertanto i vettori $u_1' = u_1/\sqrt{6}$ e $u_2' = u_2$ sono una base ortonormale di U.

(b) È immediato verificare che $u_1 \cdot v = 0$ e $u_2 \cdot v = 0$, quindi $u_1, u_2 \in W$. Dato che u_1 e u_2 sono una base di U, da ciò segue che $U \subset W$. È facile verificare che $\dim W = 3$ e, dato che $\dim U = 2$, deve essere $\dim L = \dim L' = 1$. Per trovare una base di L (e di L') basta trovare un vettore ℓ (o ℓ') che appartenga a W ma sia linearmente indipendente da u_1 e u_2. Di tali vettori ne esistono infiniti: due possibili scelte sono $\ell = (0, 0, 1, 0)$ e $\ell' = (0, 1, 1, 0)$.

(c) I vettori di $U^\perp$ devono essere ortogonali ai vettori u_1 e u_2. Da ciò segue che le equazioni cartesiane di $U^\perp$ sono

$$U^\perp : \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Da queste equazioni si ricava

$$\begin{cases} x_4 = x_1 + 2x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

quindi una base di $U^\perp$ è formata dai due vettori $u_1' = (1, 0, 0, 1)$ e $u_2' = (0, 0, 1, 2)$.

(d) Il generico vettore di $U^\perp$ è dato da $au_1' + bu_2' = (a, 0, b, a + 2b)$. Questo vettore appartiene anche a W se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione di W. Si ottiene quindi $2a+2b = 0$, da cui si ricava $a = -b$ e quindi possiamo prendere $a = 1$ e $b = -1$. Da ciò si deduce che $\dim(U^\perp \cap W) = 1$ e una base di $U^\perp \cap W$ è formata dal vettore $(1, 0, -1, -1)$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -6 & t \end{pmatrix}$.

(a) Determinare il rango di A_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Per tutto il resto dell'esercizio si ponga $t = 0$. Sia $v = (2, \alpha, 2, 3)$. Trovare il valore di α per cui il sistema $A_0 X = v$ ha soluzioni, e trovare tutte le soluzioni di tale sistema.

(c) Sia U il sottospazio generato dalle righe di A_0 e W il sottospazio generato dalle colonne di A_0. Trovare una base di U e una base di W.

(d) Trovare una base di $\operatorname{Ker}(A_0^T)$ (ove A_0^T è la trasposta della matrice A_0) e verificare che $\operatorname{Ker}(A_0^T) = W^{\perp}$.

Soluzione. (a) Usando operazioni elementari sulle righe si può trasformare la matrice A_t nella matrice seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

Da ciò si deduce che se $t = 1$ la matrice ha rango 2, mentre per $t \neq 1$ essa ha rango 3.

(b) La matrice A_0 ha rango 3. Il sistema $A_0 X = v$ ha soluzioni se e solo se anche il rango della matrice completa è 3. Applicando alla matrice completa le stesse operazioni elementari sulle righe usate nel punto precedente, si ottiene la seguente matrice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3\alpha + 5 \end{array}\right)$$

Da ciò si deduce che il sistema $A_0 X = v$ ha soluzioni se e solo se $\alpha = 2$. Risolvendo il sistema si trova

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_3 \\ x_2 = 1 + 2x_3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

L'insieme di tutte le soluzioni può anche essere scritto come segue:

$$(1, 1, 0, 1) + \lambda\,(2, 2, 1, 0), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

ove $(2, 2, 1, 0)$ è una base del nucleo di A_0.

(c) Dato che la matrice A_0 ha rango 3, si ha $\dim U = \dim W = 3$, quindi come base di U (risp. di W) possiamo prendere 3 righe (risp. 3 colonne) linearmente indipendenti. Dai calcoli fatti nel punto (a) si vede che la terza riga (risp. la terza colonna) è combinazione lineare delle prime due righe (risp. delle prime due colonne), quindi le righe linearmente indipendenti sono la prima, la seconda e la quarta (e lo stesso vale per le colonne). Quindi una base di U è formata dalle righe $(1, -1, 0, 2)$, $(0, 1, -2, 1)$ e $(-1, 4, -6, 0)$ e una base di W è formata dalle colonne $(1, 0, 2, -1)$, $(-1, 1, -3, 4)$ e $(2, 1, 3, 0)$.

(d) La matrice A_0^T è

$$A_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

e riducendola a forma a scala si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando quest'ultima matrice si trova che una base di $\mathrm{Ker}(A_0^T)$ è data dal vettore $(-2,1,1,0)$. Dato che questo vettore è ortogonale ai vettori della base di W, e dato che $\dim W^\perp = 1$, si deduce che questo vettore è una base di $W^\perp$ e pertanto $\mathrm{Ker}(A_0^T) = W^\perp$.

Esercizio 3. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(e_2) = (2,-2,-3)$, $f(e_3) = (0,4,4)$ e il nucleo di f è generato dal vettore $(-1,1,1)$.

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio).

(b) Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di f.

(c) Trovare delle basi degli autospazi di f. È possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice di f rispetto a questa base sia diagonale?

(d) Si dica se è possibile trovare una funzione lineare $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice abbia l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 2 e tale che $\dim(\mathrm{Im}\, g) = 2$. La matrice di una tale funzione g (se esiste) è diagonalizzabile?

Soluzione. (a) La seconda e terza colonna della matrice sono date da $f(e_2) = (2,-2,-3)$ e $f(e_3) = (0,4,4)$, rispettivamente. Quindi la matrice ha la forma seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ b & -2 & 4 \\ c & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Dato che il nucleo di f è generato dal vettore $v = (-1,1,1)$, si deve avere $Av = 0$, da cui si ricava $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$. Quindi la matrice cercata è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Calcolando il polinomio caratteristico della matrice A si trova $-\lambda(\lambda-2)^2$, da cui si deduce che gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ (con molteplicità 1) e $\lambda_2 = 2$ (con molteplicità 2).

(c) L'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = 0$ è il nucleo di f e sappiamo che una sua base è data dal vettore $v = (-1,1,1)$. Calcolando l'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = 2$ si trova che esso ha dimensione 1 e una sua base è data dal vettore $v_2 = (-2,0,1)$. Dato che la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è diversa dalla sua molteplicità algebrica, la matrice A non è diagonalizzabile.

(d) Se $\dim(\mathrm{Im}\, g) = 2$ allora $\dim(\mathrm{Ker}\, g) = 1$, quindi g deve essere una funzione lineare avente un autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 2 ma con molteplicità geometrica 1. Una tale funzione lineare esiste, ad esempio quella la cui matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ma non può essere diagonalizzabile perché le molteplicità algebrica e geometrica sono diverse.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il punto $P = (1,2,-1)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per P e perpendicolare alla retta r.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P, incidente la retta r e perpendicolare al vettore $u = (1, -1, -1)$.

(c) Tra tutte le rette passanti per P e contenute nel piano π trovare quella di minima distanza dal punto $A = (1, 3, 4)$ e scriverne le equazioni parametriche.

Soluzione. (a) Due punti della retta r sono $R_1 = (1, 0, 2)$ e $R_2 = (-1, 1, 0)$, quindi il vettore direttore di r è $v_r = R_1 - R_2 = (2, -1, 2)$. Tale vettore è anche il vettore n_π, ortogonale al piano π, la cui equazione è quindi $2x - y + 2z + d = 0$. Imponendo la condizione di passaggio per il punto P si trova $d = 2$, quindi l'equazione cartesiana del piano π è $2x - y + 2z + 2 = 0$.

(b) Sia X un punto generico della retta r, le cui coordinate sono $X = (1 + 2t, 0 - t, 2 + 2t)$. Il vettore $\vec{PX}$ è $\vec{PX} = X - P = (2t, -t - 2, 3 + 2t)$. Tale vettore deve essere ortogonale al vettore u, quindi si deve avere $\vec{PX} \cdot u = 0$. Risolvendo questa equazione si trova $t = 1$, quindi $X = (3, -1, 4)$ e $\vec{PX} = (2, -3, 5)$. Questo vettore è il vettore direttore della retta s, le cui equazioni parametriche sono quindi

$$s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

(c) La retta che stiamo cercando è quella che passa per P e per il punto A', che è la proiezione ortogonale di A sul piano π. Consideriamo quindi la retta ortogonale al piano π passante per A, le cui equazioni sono:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

Mettendo a sistema queste equazioni con l'equazione di π si trova $t = -1$, da cui si ricavano le coordinate del punto $A' = (-1, 4, 2)$. Il vettore $\vec{PA'}$ è $\vec{PA'} = A' - P = (-2, 2, -3)$ e quindi le equazioni parametriche della retta cercata sono

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t. \end{cases}$$