**A**

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**4° appello — 6 febbraio 2024**

---

**Esercizio 1.** In $\mathbb{R}^4$ sia $U_\alpha$ il sottospazio generato da $u_1 = (2, -1, 0, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 1, -2)$, $u_3 = (\alpha, -1, 2, -1)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare la dimensione di $U_\alpha$ al variare di $\alpha$.

(b) Per il valore di $\alpha$ per cui $\dim U_\alpha = 2$ trovare una base ortogonale di $U_\alpha$.

(c) Si ponga ora $\alpha = 0$ per tutto il resto dell'esercizio. Trovare una base di $U_0^\perp$.

(d) Nel sottospazio $W$ di equazione $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ si trovi un vettore $w$ tale che la sua proiezione ortogonale sul sottospazio $U_0$ sia $u = (1, 0, 1, -1)$.

**Esercizio 2.** Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \\ -3x_1 + x_2 + t\,x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Scrivere la matrice $A$ di $f$ rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio e determinare il rango di $A$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Ora si ponga $t = 0$ fino alla fine dell'esercizio. Trovare basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(c) Determinare l'antiimmagine del vettore $(0, 3, -2)$.

(d) Consideriamo i vettori $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, -1, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 0, 1, 0)$, $v_4 = (0, 1, 1, 1)$. Scrivere la matrice $B$ di $f$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ del dominio e alla base canonica del codominio. Determinare una matrice $P$ tale che $B = AP$.

**Esercizio 3.** Consideriamo la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ t & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $A_t$.

(b) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice $A_t$ ha autovalori con molteplicità $> 1$.

(c) Per ciascuno dei valori di $t$ trovati al punto (b) dire se la matrice $A_t$ è diagonalizzabile.

(d) Si dica se esistono dei valori di $t$ per i quali esiste una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A_t$ (la risposta deve essere adeguatamente giustificata).

**Esercizio 4.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P = (1, -1, -1)$ e la retta $r$ di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano $\pi$ che contiene la retta $r$ e passa per $P$.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta $s$ passante per $P$, contenuta nel piano $\pi$ e perpendicolare alla retta $r$.

(c) Sulla retta $r$ trovare il punto $H$ di minima distanza dal punto $A = (5, -3, 2)$.

(d) Consideriamo i piani $\sigma$ che hanno equazione del tipo $2x + \alpha\,y + 3z + \beta = 0$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Trovare i valori di $\alpha$ e $\beta$ tali che il piano $\sigma$ contenga la retta $r$.

**B**

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**4$^{\text{o}}$ appello — 6 febbraio 2024**

---

**Esercizio 1.** In $\mathbb{R}^4$ sia $U_\alpha$ il sottospazio generato da $u_1 = (2, -1, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 2, -1, 2)$, $u_3 = (\alpha, 4, -1, 6)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare la dimensione di $U_\alpha$ al variare di $\alpha$.

(b) Per il valore di $\alpha$ per cui $\dim U_\alpha = 2$ trovare una base ortogonale di $U_\alpha$.

(c) Si ponga ora $\alpha = 0$ per tutto il resto dell'esercizio. Trovare una base di $U_0^\perp$.

(d) Nel sottospazio $W$ di equazione $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ si trovi un vettore $w$ tale che la sua proiezione ortogonale sul sottospazio $U_0$ sia $u = (3, -3, 2, -2)$.

**Esercizio 2.** Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \\ -4x_1 - 3x_2 + t\,x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Scrivere la matrice $A$ di $f$ rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio e determinare il rango di $A$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Ora si ponga $t = 0$ fino alla fine dell'esercizio. Trovare basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(c) Determinare l'antiimmagine del vettore $(2, 0, -1)$.

(d) Consideriamo i vettori $v_1 = (1, 0, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 0, -1, 0)$, $v_4 = (0, 1, 1, 1)$. Scrivere la matrice $B$ di $f$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ del dominio e alla base canonica del codominio. Determinare una matrice $P$ tale che $B = AP$.

**Esercizio 3.** Consideriamo la matrice $A_t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ t & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $A_t$.

(b) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice $A_t$ ha autovalori con molteplicità $> 1$.

(c) Per ciascuno dei valori di $t$ trovati al punto (b) dire se la matrice $A_t$ è diagonalizzabile.

(d) Si dica se esistono dei valori di $t$ per i quali esiste una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A_t$ (la risposta deve essere adeguatamente giustificata).

**Esercizio 4.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P = (1, 1, 1)$ e la retta $r$ di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano $\pi$ che contiene la retta $r$ e passa per $P$.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta $s$ passante per $P$, contenuta nel piano $\pi$ e perpendicolare alla retta $r$.

(c) Sulla retta $r$ trovare il punto $H$ di minima distanza dal punto $A = (-1, 4, -6)$.

(d) Consideriamo i piani $\sigma$ che hanno equazione del tipo $x + \alpha\, y - 3z + \beta = 0$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Trovare i valori di $\alpha$ e $\beta$ tali che il piano $\sigma$ contenga la retta $r$.

C

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ______________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**4º appello — 6 febbraio 2024**

---

**Esercizio 1.** In $\mathbb{R}^4$ sia $U_\alpha$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, 2, 1, 1)$, $u_2 = (2, 1, 0, 1)$, $u_3 = (\alpha, 1, 2, -1)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare la dimensione di $U_\alpha$ al variare di $\alpha$.

(b) Per il valore di $\alpha$ per cui $\dim U_\alpha = 2$ trovare una base ortogonale di $U_\alpha$.

(c) Si ponga ora $\alpha = 0$ per tutto il resto dell'esercizio. Trovare una base di $U_0^\perp$.

(d) Nel sottospazio $W$ di equazione $2x_1+x_2-x_3+x_4 = 0$ si trovi un vettore $w$ tale che la sua proiezione ortogonale sul sottospazio $U_0$ sia $u = (-1, 1, 1, 0)$.

**Esercizio 2.** Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \\ -x_1 + 5x_2 + t\,x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}$$

ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Scrivere la matrice $A$ di $f$ rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio e determinare il rango di $A$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Ora si ponga $t = 0$ fino alla fine dell'esercizio. Trovare basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(c) Determinare l'antiimmagine del vettore $(2, 3, 0)$.

(d) Consideriamo i vettori $v_1 = (1, 0, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 0, 1, 0)$, $v_4 = (0, -1, 1, 1)$. Scrivere la matrice $B$ di $f$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ del dominio e alla base canonica del codominio. Determinare una matrice $P$ tale che $B = AP$.

**Esercizio 3.** Consideriamo la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $A_t$.

(b) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice $A_t$ ha autovalori con molteplicità $> 1$.

(c) Per ciascuno dei valori di $t$ trovati al punto (b) dire se la matrice $A_t$ è diagonalizzabile.

(d) Si dica se esistono dei valori di $t$ per i quali esiste una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A_t$ (la risposta deve essere adeguatamente giustificata).

**Esercizio 4.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ sono dati il punto $P = (1, 1, 1)$ e la retta $r$ di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano $\pi$ che contiene la retta $r$ e passa per $P$.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta $s$ passante per $P$, contenuta nel piano $\pi$ e perpendicolare alla retta $r$.

(c) Sulla retta $r$ trovare il punto $H$ di minima distanza dal punto $A = (3, 3, 8)$.

(d) Consideriamo i piani $\sigma$ che hanno equazione del tipo $x + \alpha\, y - 3z + \beta = 0$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Trovare i valori di $\alpha$ e $\beta$ tali che il piano $\sigma$ contenga la retta $r$.

**D**

Cognome __________________ Nome __________________ Matricola __________

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**$4^{\text{o}}$ appello — 6 febbraio 2024**

---

**Esercizio 1.** In $\mathbb{R}^4$ sia $U_\alpha$ il sottospazio generato da $u_1 = (1,1,0,-2)$, $u_2 = (2,1,1,-1)$, $u_3 = (\alpha,1,-2,-4)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare la dimensione di $U_\alpha$ al variare di $\alpha$.

(b) Per il valore di $\alpha$ per cui $\dim U_\alpha = 2$ trovare una base ortogonale di $U_\alpha$.

(c) Si ponga ora $\alpha = 0$ per tutto il resto dell'esercizio. Trovare una base di $U_0^\perp$.

(d) Nel sottospazio $W$ di equazione $x_1 + 2x_3 + x_4 = 0$ si trovi un vettore $w$ tale che la sua proiezione ortogonale sul sottospazio $U_0$ sia $u = (3,2,1,-3)$.

**Esercizio 2.** Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -4x_1 - x_2 + t\,x_3 + 6x_4 \end{pmatrix}$$

ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Scrivere la matrice $A$ di $f$ rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio e determinare il rango di $A$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Ora si ponga $t = 0$ fino alla fine dell'esercizio. Trovare basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(c) Determinare l'antiimmagine del vettore $(1,2,1)$.

(d) Consideriamo i vettori $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,1)$, $v_3 = (1,0,1,0)$, $v_4 = (0,1,1,-1)$. Scrivere la matrice $B$ di $f$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ del dominio e alla base canonica del codominio. Determinare una matrice $P$ tale che $B = AP$.

**Esercizio 3.** Consideriamo la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ t & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $A_t$.

(b) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice $A_t$ ha autovalori con molteplicità $> 1$.

(c) Per ciascuno dei valori di $t$ trovati al punto (b) dire se la matrice $A_t$ è diagonalizzabile.

(d) Si dica se esistono dei valori di $t$ per i quali esiste una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A_t$ (la risposta deve essere adeguatamente giustificata).

**Esercizio 4.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P = (2,1,-3)$ e la retta $r$ di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano $\pi$ che contiene la retta $r$ e passa per $P$.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta $s$ passante per $P$, contenuta nel piano $\pi$ e perpendicolare alla retta $r$.

(c) Sulla retta $r$ trovare il punto $H$ di minima distanza dal punto $A = (2,5,2)$.

(d) Consideriamo i piani $\sigma$ che hanno equazione del tipo $3x + \alpha\,y - 4z + \beta = 0$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Trovare i valori di $\alpha$ e $\beta$ tali che il piano $\sigma$ contenga la retta $r$.