A

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3$^{\text{o}}$ appello — 18 settembre 2024

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, 0, -1, 1)$, $u_2 = (2, 1, -1, 3)$, $u_3 = (1, 2, 1, 3)$.

(a) Verificare che $\dim U = 2$ e trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $\ell = (2, -1, -3, 2)$. Dato $v = (-1, 3, 4, 0) \in \mathbb{R}^4$ trovare un vettore $w \in L$ in modo che esista $u \in U$ tale che $v = u + w$.

(d) Trovare una base di un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim W = 2$, tale che $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim(U^\perp \cap W) = 1$. Sarebbe possibile trovare un sottospazio $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim \widetilde{W} = 2$, tale che $\dim(U \cap \widetilde{W}) = 0$ e $\dim(U^\perp \cap \widetilde{W}) = 0$? [*la risposta deve essere giustificata*]

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(1, 0, 1) = (5, 1, 2, 1)$, $f(0, 1, -1) = (-2, 1, 0, -1)$, $f(1, 0, -1) = (-1, -3, -2, 1)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$.

(b) Scrivere basi del nucleo e dell'immagine di f.

(c) Sia $w_\alpha = (3, \alpha, -2, 3)$. Trovare il valore di α per cui $w_\alpha \in \operatorname{Im} f$ e per tale α trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w_\alpha$.

(d) Sia $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice è la trasposta della matrice di f trovata al punto (a). Scrivere la matrice della funzione composta $g \circ f$ (rispetto alle basi canoniche) e stabilire se $g \circ f$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (-2y + 2z, -x + y - 2z, -x + 2y - 3z)$$

(a) La funzione f è iniettiva? è suriettiva?

(b) Determinare tutti i numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali esistono dei vettori $v \neq \vec{0}$ tali che $f(v) = av$.

(c) Si dica se esiste una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare qualunque e sia G la sua matrice rispetto alla base canonica. Senza conoscere la matrice G è possibile stabilire se la matrice $A = GG^T$ è diagonalizzabile? [*la risposta deve essere giustificata*]

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P = (1, 2, 2)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x + z - 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente r e P.

(b) Sia σ il piano di equazione $2x + z - 2 = 0$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s ottenuta intersecando i piani π e σ.

(c) Sia H la proiezione ortogonale di $A = (3, 2, 6)$ sul piano σ. Trovare le coordinate di H e poi trovare un punto B tale che H sia un punto interno del segmento AB e $\operatorname{dist}(B, H) = 2 \operatorname{dist}(A, H)$.

(d) Consideriamo i piani di equazione $(\alpha + \beta)x + (\alpha + 2\gamma)y + (2\alpha - \beta + \gamma)z = 2\beta + \gamma$, per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, non tutti nulli. Verificare che per ogni α, β, γ tutti questi piani passano per lo stesso punto e trovare le coordinate di tale punto.

B

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3$^{\text{o}}$ appello — 18 settembre 2024

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1,2,0,-1)$, $u_2 = (3,1,-2,-1)$, $u_3 = (-3,4,4,-1)$.

(a) Verificare che $\dim U = 2$ e trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $\ell = (-2,-1,2,3)$. Dato $v = (0,1,2,4) \in \mathbb{R}^4$ trovare un vettore $w \in L$ in modo che esista $u \in U$ tale che $v = u + w$.

(d) Trovare una base di un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim W = 2$, tale che $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim(U^\perp \cap W) = 1$. Sarebbe possibile trovare un sottospazio $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim \widetilde{W} = 2$, tale che $\dim(U \cap \widetilde{W}) = 0$ e $\dim(U^\perp \cap \widetilde{W}) = 0$? [*la risposta deve essere giustificata*]

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(1,0,1) = (0,2,-2,6)$, $f(0,1,-1) = (3,-3,-3,-3)$, $f(1,0,-1) = (2,-2,-2,-2)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$.

(b) Scrivere basi del nucleo e dell'immagine di f.

(c) Sia $w_\alpha = (4,-1,\alpha,5)$. Trovare il valore di α per cui $w_\alpha \in \operatorname{Im} f$ e per tale α trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w_\alpha$.

(d) Sia $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice è la trasposta della matrice di f trovata al punto (a). Scrivere la matrice della funzione composta $g \circ f$ (rispetto alle basi canoniche) e stabilire se $g \circ f$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x,y,z) = (-2x+4y-8z, 2x+4z, 2x-2y+6z)$$

(a) La funzione f è iniettiva? è suriettiva?

(b) Determinare tutti i numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali esistono dei vettori $v \neq \vec{0}$ tali che $f(v) = av$.

(c) Si dica se esiste una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare qualunque e sia G la sua matrice rispetto alla base canonica. Senza conoscere la matrice G è possibile stabilire se la matrice $A = GG^T$ è diagonalizzabile? [*la risposta deve essere giustificata*]

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P = (1,-1,0)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} y - 3z - 1 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente r e P.

(b) Sia σ il piano di equazione $2y - z + 2 = 0$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s ottenuta intersecando i piani π e σ.

(c) Sia H la proiezione ortogonale di $A = (-2,-3,6)$ sul piano σ. Trovare le coordinate di H e poi trovare un punto B tale che H sia un punto interno del segmento AB e $\operatorname{dist}(B,H) = 2\operatorname{dist}(A,H)$.

(d) Consideriamo i piani di equazione $(\alpha+\beta)x + (2\gamma-\alpha)y + (\beta-\alpha-\gamma)z = 3\beta+\gamma$, per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, non tutti nulli. Verificare che per ogni α, β, γ tutti questi piani passano per lo stesso punto e trovare le coordinate di tale punto.

C

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3º appello — 18 settembre 2024

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1,-1,1,0)$, $u_2 = (2,-1,3,1)$, $u_3 = (1,1,3,2)$.

(a) Verificare che $\dim U = 2$ e trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $\ell = (2,-3,2,-1)$. Dato $v = (-1,4,0,3) \in \mathbb{R}^4$ trovare un vettore $w \in L$ in modo che esista $u \in U$ tale che $v = u + w$.

(d) Trovare una base di un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim W = 2$, tale che $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim(U^\perp \cap W) = 1$. Sarebbe possibile trovare un sottospazio $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim \widetilde{W} = 2$, tale che $\dim(U \cap \widetilde{W}) = 0$ e $\dim(U^\perp \cap \widetilde{W}) = 0$? [*la risposta deve essere giustificata*]

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(1,0,1) = (0,2,2,3)$, $f(0,1,-1) = (-1,2,3,1)$, $f(1,0,-1) = (-2,2,4,-1)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$.

(b) Scrivere basi del nucleo e dell'immagine di f.

(c) Sia $w_\alpha = (2,\alpha,0,7)$. Trovare il valore di α per cui $w_\alpha \in \operatorname{Im} f$ e per tale α trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w_\alpha$.

(d) Sia $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice è la trasposta della matrice di f trovata al punto (a). Scrivere la matrice della funzione composta $g \circ f$ (rispetto alle basi canoniche) e stabilire se $g \circ f$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x,y,z) = (y - z, 2x - y + 2z, 2x - 2y + 3z)$$

(a) La funzione f è iniettiva? è suriettiva?

(b) Determinare tutti i numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali esistono dei vettori $v \neq \vec{0}$ tali che $f(v) = av$.

(c) Si dica se esiste una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare qualunque e sia G la sua matrice rispetto alla base canonica. Senza conoscere la matrice G è possibile stabilire se la matrice $A = GG^T$ è diagonalizzabile? [*la risposta deve essere giustificata*]

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P = (2,2,-1)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente r e P.

(b) Sia σ il piano di equazione $x - 2z - 1 = 0$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s ottenuta intersecando i piani π e σ.

(c) Sia H la proiezione ortogonale di $A = (3,-2,6)$ sul piano σ. Trovare le coordinate di H e poi trovare un punto B tale che H sia un punto interno del segmento AB e $\operatorname{dist}(B,H) = 2\operatorname{dist}(A,H)$.

(d) Consideriamo i piani di equazione $(\alpha + 2\beta)x + (\alpha + 3\gamma)y + (\alpha - \beta + \gamma)z = 4\beta + \gamma$, per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, non tutti nulli. Verificare che per ogni α, β, γ tutti questi piani passano per lo stesso punto e trovare le coordinate di tale punto.

D

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3º appello — 18 settembre 2024

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, 0, -1, 2)$, $u_2 = (3, -2, -1, 1)$, $u_3 = (-3, 4, -1, 4)$.

(a) Verificare che $\dim U = 2$ e trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $\ell = (-2, 2, 3, -1)$. Dato $v = (0, 2, 4, 1) \in \mathbb{R}^4$ trovare un vettore $w \in L$ in modo che esista $u \in U$ tale che $v = u + w$.

(d) Trovare una base di un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim W = 2$, tale che $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim(U^\perp \cap W) = 1$. Sarebbe possibile trovare un sottospazio $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim \widetilde{W} = 2$, tale che $\dim(U \cap \widetilde{W}) = 0$ e $\dim(U^\perp \cap \widetilde{W}) = 0$? [*la risposta deve essere giustificata*]

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(1, 0, 1) = (3, -5, -1, 3)$, $f(0, 1, -1) = (2, 2, 2, -2)$, $f(1, 0, -1) = (-1, -1, -1, 1)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$.

(b) Scrivere basi del nucleo e dell'immagine di f.

(c) Sia $w_\alpha = (2, 6, \alpha, -5)$. Trovare il valore di α per cui $w_\alpha \in \operatorname{Im} f$ e per tale α trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w_\alpha$.

(d) Sia $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice è la trasposta della matrice di f trovata al punto (a). Scrivere la matrice della funzione composta $g \circ f$ (rispetto alle basi canoniche) e stabilire se $g \circ f$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (-6x - 4y - 4z, 2x + 2z, 4x + 4y + 2z)$$

(a) La funzione f è iniettiva? è suriettiva?

(b) Determinare tutti i numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali esistono dei vettori $v \neq \vec{0}$ tali che $f(v) = av$.

(c) Si dica se esiste una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare qualunque e sia G la sua matrice rispetto alla base canonica. Senza conoscere la matrice G è possibile stabilire se la matrice $A = GG^T$ è diagonalizzabile? [*la risposta deve essere giustificata*]

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P = (0, 3, 1)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 3z - 2 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente r e P.

(b) Sia σ il piano di equazione $x + 2z - 1 = 0$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s ottenuta intersecando i piani π e σ.

(c) Sia H la proiezione ortogonale di $A = (5, 2, 3)$ sul piano σ. Trovare le coordinate di H e poi trovare un punto B tale che H sia un punto interno del segmento AB e $\operatorname{dist}(B, H) = 2 \operatorname{dist}(A, H)$.

(d) Consideriamo i piani di equazione $(\alpha + 2\beta)x + (\beta - \alpha + \gamma)y + (3\gamma - \alpha)z = 4\beta - \gamma$, per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, non tutti nulli. Verificare che per ogni α, β, γ tutti questi piani passano per lo stesso punto e trovare le coordinate di tale punto.