A

Cognome ________________________ Nome ________________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4º appello — 4 febbraio 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 - 2x_3 = 0$ e sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 1, 2)$, $u_2 = (-4, 4, -2, -3)$, $u_3 = (2, 1, 1, 3)$.

(a) Determinare la dimensione e una base di V.

(b) Determinare la dimensione e una base di U e verificare che $U \subset V$.

(c) Trovare un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = V$. Tale L è unico?

(d) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ e $x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Trovare la dimensione e una base di $U \cap W$ e di $U + W$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che

$$f(1, -1, 0) = (1, -1, 0, -1), \quad f(0, -1, 1) = (0, -6, 4, -4), \quad f(1, 1, 0) = (3, 3, -4, 1).$$

(a) Scrivere la matrice di f nelle basi canoniche del dominio e del codominio.

(b) Trovare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} f$ e di $\operatorname{Ker} f$.

(c) Dire per quale valore di α si ha $(6, -3, -2, \alpha) \in \operatorname{Im} f$.

(d) Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni lineari da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ e sia U il sottospazio vettoriale di V definito da

$$U = \{\, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f \circ g = 0 \,\}.$$

Trovare la dimensione e una base di U.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \alpha & 1-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha - 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

(a) Dire se esistono valori di α tali che la matrice A sia invertibile.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Determinare una base degli autospazi e dire se la matrice A è diagonalizzabile.

(d) Ora poniamo $\alpha = 0$. Dire se, per tale valore di α, la matrice A è simile alla sua trasposta A^T (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P = (3, -3, 0)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per il punto P e perpendicolare alla retta r.

(b) Determinare la proiezione ortogonale di P sulla retta r e la distanza di P da r.

(c) Sia s la retta di equazioni parametriche $x = 2 + 2t$, $y = -3t$, $z = 1 - t$. Determinare se le rette r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(d) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ passante per il punto $A = (1, 2, -4)$ che interseca entrambe le rette r e s. Trovare le coordinate dei punti $\ell \cap r$ e $\ell \cap s$.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4º appello — 4 febbraio 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio vettoriale di equazione $3x_1 + x_4 = 0$ e sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -2, 2, -3)$, $u_2 = (-2, 1, -2, 6)$, $u_3 = (-1, -4, 2, 3)$.

(a) Determinare la dimensione e una base di V.

(b) Determinare la dimensione e una base di U e verificare che $U \subset V$.

(c) Trovare un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = V$. Tale L è unico?

(d) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e $2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0$. Trovare la dimensione e una base di $U \cap W$ e di $U + W$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che

$$f(1, 1, 0) = (4, -6, 2, -2), \quad f(0, -1, 1) = (-4, 5, -1, 0), \quad f(1, -1, 0) = (0, 2, -2, 4).$$

(a) Scrivere la matrice di f nelle basi canoniche del dominio e del codominio.

(b) Trovare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} f$ e di $\operatorname{Ker} f$.

(c) Dire per quale valore di α si ha $(2, -6, 4, \alpha) \in \operatorname{Im} f$.

(d) Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni lineari da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ e sia U il sottospazio vettoriale di V definito da

$$U = \{\, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f \circ g = 0 \,\}.$$

Trovare la dimensione e una base di U.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha - 1 & -\alpha \\ -1 & \alpha & -1 - \alpha \end{pmatrix}$$

(a) Dire se esistono valori di α tali che la matrice A sia invertibile.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Determinare una base degli autospazi e dire se la matrice A è diagonalizzabile.

(d) Ora poniamo $\alpha = 1$. Dire se, per tale valore di α, la matrice A è simile alla sua trasposta A^T (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P = (0, -5, -4)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 2z = 4 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per il punto P e perpendicolare alla retta r.

(b) Determinare la proiezione ortogonale di P sulla retta r e la distanza di P da r.

(c) Sia s la retta di equazioni parametriche $x = 2 + t$, $y = 2t$, $z = 1 - 3t$. Determinare se le rette r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(d) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ passante per il punto $A = (1, -4, -6)$ che interseca entrambe le rette r e s. Trovare le coordinate dei punti $\ell \cap r$ e $\ell \cap s$.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4° appello — 4 febbraio 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio vettoriale di equazione $2x_1 - x_2 = 0$ e sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 2, -1, 2)$, $u_2 = (2, 4, -4, 3)$, $u_3 = (1, 2, 1, 3)$.

(a) Determinare la dimensione e una base di V.

(b) Determinare la dimensione e una base di U e verificare che $U \subset V$.

(c) Trovare un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = V$. Tale L è unico?

(d) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e $x_1 + x_3 - x_4 = 0$. Trovare la dimensione e una base di $U \cap W$ e di $U + W$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che

$$f(0, 1, 1) = (2, 4, -1, 5), \quad f(1, 1, 0) = (2, 0, -3, 7), \quad f(0, 1, -1) = (0, 2, 1, -1).$$

(a) Scrivere la matrice di f nelle basi canoniche del dominio e del codominio.

(b) Trovare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} f$ e di $\operatorname{Ker} f$.

(c) Dire per quale valore di α si ha $(-2, 8, 7, \alpha) \in \operatorname{Im} f$.

(d) Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni lineari da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ e sia U il sottospazio vettoriale di V definito da

$$U = \{\, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f \circ g = 0 \,\}.$$

Trovare la dimensione e una base di U.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2+\alpha & 2 & \alpha \\ 2 & 0 & 2 \\ -\alpha & -2 & 2-\alpha \end{pmatrix}$$

(a) Dire se esistono valori di α tali che la matrice A sia invertibile.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Determinare una base degli autospazi e dire se la matrice A è diagonalizzabile.

(d) Ora poniamo $\alpha = -2$. Dire se, per tale valore di α, la matrice A è simile alla sua trasposta A^T (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P = (0, 3, -3)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per il punto P e perpendicolare alla retta r.

(b) Determinare la proiezione ortogonale di P sulla retta r e la distanza di P da r.

(c) Sia s la retta di equazioni parametriche $x = 1 + t$, $y = 2 - 2t$, $z = 3t$. Determinare se le rette r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(d) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ passante per il punto $A = (-4, 1, 2)$ che interseca entrambe le rette r e s. Trovare le coordinate dei punti $\ell \cap r$ e $\ell \cap s$.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4º appello — 4 febbraio 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 + 3x_2 = 0$ e sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (-3, 1, -2, 2)$, $u_2 = (6, -2, 1, -2)$, $u_3 = (3, -1, -4, 2)$.

(a) Determinare la dimensione e una base di V.

(b) Determinare la dimensione e una base di U e verificare che $U \subset V$.

(c) Trovare un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = V$. Tale L è unico?

(d) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_2 + x_3 + x_4 = 0$ e $2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$. Trovare la dimensione e una base di $U \cap W$ e di $U + W$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che

$$f(1, -1, 0) = (3, -2, -3, -4), \quad f(0, 1, 1) = (-1, -2, 5, 0), \quad f(1, 1, 0) = (-1, 2, -1, 2).$$

(a) Scrivere la matrice di f nelle basi canoniche del dominio e del codominio.

(b) Trovare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} f$ e di $\operatorname{Ker} f$.

(c) Dire per quale valore di α si ha $(-5, 6, 1, \alpha) \in \operatorname{Im} f$.

(d) Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni lineari da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ e sia U il sottospazio vettoriale di V definito da

$$U = \{\, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f \circ g = 0 \,\}.$$

Trovare la dimensione e una base di U.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & \alpha - 2 & -\alpha \\ -2 & \alpha & -2 - \alpha \end{pmatrix}$$

(a) Dire se esistono valori di α tali che la matrice A sia invertibile.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Determinare una base degli autospazi e dire se la matrice A è diagonalizzabile.

(d) Ora poniamo $\alpha = 2$. Dire se, per tale valore di α, la matrice A è simile alla sua trasposta A^T (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P = (-4, 0, -5)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x + y - z = -1 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per il punto P e perpendicolare alla retta r.

(b) Determinare la proiezione ortogonale di P sulla retta r e la distanza di P da r.

(c) Sia s la retta di equazioni parametriche $x = 1 + 3t$, $y = 2 - t$, $z = -2t$. Determinare se le rette r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(d) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ passante per il punto $A = (-6, 1, -4)$ che interseca entrambe le rette r e s. Trovare le coordinate dei punti $\ell \cap r$ e $\ell \cap s$.