**A**

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**1$^{\text{o}}$ appello — 17 giugno 2025**

---

**Esercizio 1.** Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di $f$. $f$ è iniettiva? $f$ è suriettiva?

(b) Sia $U$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (1,-2,-1,0)$, $u_2 = (-1,5,4,2)$, $u_3 = (0,3,3,2)$. Verificare che $\dim U = 2$, trovare una relazione di dipendenza lineare tra $u_1$, $u_2$, $u_3$ e scrivere le equazioni cartesiane di $U$.

(c) Trovare una base di $U \cap \operatorname{Ker} f$ e una base di $f(U)$.

(d) Determinare se esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ il cui nucleo abbia dimensione 1 e tale che $g(u_1) = e_1$, $g(u_2) = e_2$, $g(u_3) = e_3$, dove $e_1, e_2, e_3$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & t & 2t-1 \\ 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $A$, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire se per $t = 3$ la matrice $A$ è diagonalizzabile nel campo dei **numeri complessi** [*la risposta deve essere giustificata*].

(b) Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori sono reali, specificando i casi in cui tali autovalori hanno molteplicità maggiore di 1.

(c) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice $A$ è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali.

(d) Determinare il valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A$ e scrivere tale base.

**Esercizio 3.** Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di $U$ e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

(c) Dato $v = (2,-7,8,-5)$ si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

**Esercizio 4.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette $r : \begin{cases} 2x + y - 3z - 5 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$

(a) Si dica se $r$ e $s$ sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene la retta $r$ ed è parallelo a $s$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta $\ell$ che interseca le rette $r$ e $s$ ed è ortogonale ad entrambe. Trovare i punti di minima distanza delle rette $r$ e $s$.

**B**

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**1º appello — 17 giugno 2025**

---

**Esercizio 1.** Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di $f$. $f$ è iniettiva? $f$ è suriettiva?

(b) Sia $U$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (0,-1,2,-2)$, $u_2 = (-1,1,-4,5)$, $u_3 = (1,1,0,-1)$. Verificare che $\dim U = 2$, trovare una relazione di dipendenza lineare tra $u_1$, $u_2$, $u_3$ e scrivere le equazioni cartesiane di $U$.

(c) Trovare una base di $U \cap \operatorname{Ker} f$ e una base di $f(U)$.

(d) Determinare se esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ il cui nucleo abbia dimensione 1 e tale che $g(u_1) = e_1$, $g(u_2) = e_2$, $g(u_3) = e_3$, dove $e_1, e_2, e_3$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & 2t-1 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-t & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $A$, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire se per $t = 2$ la matrice $A$ è diagonalizzabile nel campo dei **numeri complessi** [*la risposta deve essere giustificata*].

(b) Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori sono reali, specificando i casi in cui tali autovalori hanno molteplicità maggiore di 1.

(c) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice $A$ è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali.

(d) Determinare il valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A$ e scrivere tale base.

**Esercizio 3.** Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di $U$ e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + x_4 = 0$.

(c) Dato $v = (0,4,-3,4)$ si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

**Esercizio 4.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette $r : \begin{cases} 2x + y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t + 1 \end{cases}$

(a) Si dica se $r$ e $s$ sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene la retta $r$ ed è parallelo a $s$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta $\ell$ che interseca le rette $r$ e $s$ ed è ortogonale ad entrambe. Trovare i punti di minima distanza delle rette $r$ e $s$.

**C**

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**1º appello — 17 giugno 2025**

---

**Esercizio 1.** Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di $f$. $f$ è iniettiva? $f$ è suriettiva?

(b) Sia $U$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (3, -3, -1, 0)$, $u_2 = (-7, 3, 3, -2)$, $u_3 = (-2, 0, 1, -1)$. Verificare che $\dim U = 2$, trovare una relazione di dipendenza lineare tra $u_1$, $u_2$, $u_3$ e scrivere le equazioni cartesiane di $U$.

(c) Trovare una base di $U \cap \operatorname{Ker} f$ e una base di $f(U)$.

(d) Determinare se esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ il cui nucleo abbia dimensione 1 e tale che $g(u_1) = e_1$, $g(u_2) = e_2$, $g(u_3) = e_3$, dove $e_1, e_2, e_3$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 2t-1 & t & t \end{pmatrix}$$

(a) Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $A$, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire se per $t = 5$ la matrice $A$ è diagonalizzabile nel campo dei **numeri complessi** [*la risposta deve essere giustificata*].

(b) Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori sono reali, specificando i casi in cui tali autovalori hanno molteplicità maggiore di 1.

(c) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice $A$ è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali.

(d) Determinare il valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A$ e scrivere tale base.

**Esercizio 3.** Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di $U$ e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

(c) Dato $v = (-1, 3, 1, 5)$ si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

**Esercizio 4.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette $r : \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t + 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$

(a) Si dica se $r$ e $s$ sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene la retta $r$ ed è parallelo a $s$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta $\ell$ che interseca le rette $r$ e $s$ ed è ortogonale ad entrambe. Trovare i punti di minima distanza delle rette $r$ e $s$.

**D**

# ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**1° appello — 17 giugno 2025**

---

**Esercizio 1.** Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di $f$. $f$ è iniettiva? $f$ è suriettiva?

(b) Sia $U$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (3,-3,2,0)$, $u_2 = (3,-6,1,-3)$, $u_3 = (1,0,1,1)$. Verificare che $\dim U = 2$, trovare una relazione di dipendenza lineare tra $u_1$, $u_2$, $u_3$ e scrivere le equazioni cartesiane di $U$.

(c) Trovare una base di $U \cap \operatorname{Ker} f$ e una base di $f(U)$.

(d) Determinare se esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ il cui nucleo abbia dimensione 1 e tale che $g(u_1) = e_1$, $g(u_2) = e_2$, $g(u_3) = e_3$, dove $e_1, e_2, e_3$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 2t-1 & t \end{pmatrix}$$

(a) Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori di $A$, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire se per $t = 4$ la matrice $A$ è diagonalizzabile nel campo dei **numeri complessi** [*la risposta deve essere giustificata*].

(b) Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori sono reali, specificando i casi in cui tali autovalori hanno molteplicità maggiore di 1.

(c) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice $A$ è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali.

(d) Determinare il valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A$ e scrivere tale base.

**Esercizio 3.** Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di $U$ e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + x_4 = 0$.

(c) Dato $v = (2,5,-3,-7)$ si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

**Esercizio 4.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette $r : \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases}$

(a) Si dica se $r$ e $s$ sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene la retta $r$ ed è parallelo a $s$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta $\ell$ che interseca le rette $r$ e $s$ ed è ortogonale ad entrambe. Trovare i punti di minima distanza delle rette $r$ e $s$.