ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º appello — 17 giugno 2025

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di f. f è iniettiva? f è suriettiva?

(b) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (1,-2,-1,0)$, $u_2 = (-1,5,4,2)$, $u_3 = (0,3,3,2)$. Verificare che $\dim U = 2$, trovare una relazione di dipendenza lineare tra u_1, u_2, u_3 e scrivere le equazioni cartesiane di U.

(c) Trovare una base di $U \cap \operatorname{Ker} f$ e una base di $f(U)$.

(d) Determinare se esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ il cui nucleo abbia dimensione 1 e tale che $g(u_1) = e_1$, $g(u_2) = e_2$, $g(u_3) = e_3$, dove e_1, e_2, e_3 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. (a) Riducendo la matrice M in forma a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Da ciò segue che M ha rango 3, quindi $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$ e quindi f è suriettiva. Il nucleo di f ha dimensione 1, quindi f non è iniettiva. Una base del nucleo di f si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = 2x_3 \end{cases}$$

e ponendo $x_3 = 1$ si trova il vettore $(2,-1,1,2)$ che è una base di $\operatorname{Ker} f$.

(b) I vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti e si ha $u_3 = u_1 + u_2$. Da ciò segue che U ha dimensione 2 e una base è formata (ad esempio) da u_1 e u_3. Un generico vettore di U è quindi combinazione lineare di u_1 e u_3:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha\, u_1 + \beta\, u_3.$$

Si ottengono così le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2\alpha + 3\beta \\ x_3 = -\alpha + 3\beta \\ x_4 = 2\beta \end{cases}$$

Eliminando i parametri α e β si trovano le seguenti equazioni cartesiane di U:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

(c) Dato che $\operatorname{Ker} f$ è generato dal vettore $(2,-1,1,2)$, per trovare $U \cap \operatorname{Ker} f$ è sufficiente verificare se tale vettore appartiene a U, cioè soddisfa le equazioni di U trovate in precedenza. Si deduce che $U \cap \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f = \langle (2,-1,1,2) \rangle$.

Dato che U è generato da u_1 e u_3, l'immagine di U, $f(U)$, è generata da $f(u_1)$ e $f(u_3)$. Si ha $f(u_1) = (-1,-5,3)$ e $f(u_3) = (2,10,-6) = -2f(u_1)$. Si conclude che $f(u_1)$ e $f(u_3)$ sono linearmente dipendenti, quindi $f(U)$ ha dimensione 1 e una sua base è data da $f(u_1) = (-1,-5,3)$.

(d) Sappiamo che $u_3 = u_1 + u_2$, quindi per la linearità di g si deve avere $g(u_3) = g(u_1) + g(u_2)$. La richiesta che $g(u_1) = e_1$, $g(u_2) = e_2$, $g(u_3) = e_3$ avrebbe come conseguenza l'uguaglianza $e_3 = e_1 + e_2$, che è chiaramente falsa! Quindi una funzione g con le proprietà richieste non può esistere.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & t & 2t-1 \\ 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire se per $t = 3$ la matrice A è diagonalizzabile nel campo dei **numeri complessi** [*la risposta deve essere giustificata*].

(b) Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori sono reali, specificando i casi in cui tali autovalori hanno molteplicità maggiore di 1.

(c) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali.

(d) Determinare il valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A e scrivere tale base.

Soluzione. (a) Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$(1-x)(x^2 - 2tx + 2t^2 - t).$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = t + \sqrt{t-t^2}$, $\lambda_3 = t - \sqrt{t-t^2}$.
Per $t = 3$ gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3 + \sqrt{-6} = 3 + i\sqrt{6}$, $\lambda_3 = 3 - \sqrt{-6} = 3 - i\sqrt{6}$. Dato che questi tre autovalori sono tutti distinti, la matrice è diagonalizzabile nel campo dei numeri complessi.

(b) Gli autovalori sono reali se $t - t^2 \geq 0$, quindi per $0 \leq t \leq 1$.
Per $t = 0$ gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Per $t = 1$ gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
L'ultimo caso in cui si trovano autovalori di molteplicità maggiore di 1 è dato da $t = 1/2$. In questo caso gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$.

(c) Per $0 < t < 1$, con $t \neq 1/2$, si hanno tre autovalori reali distinti, quindi la matrice è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali.
Per $t = 0$ c'è l'autovalore 0 con molteplicità 2. Cercando gli autovettori corrispondenti a tale autovalore si trova che l'autospazio ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $(0,1,0)$. Quindi per $t = 0$ la matrice non è diagonalizzabile.
Per $t = 1$ c'è l'autovalore 1 con molteplicità 3. Cercando gli autovettori corrispondenti a tale autovalore si trova che l'autospazio ha dimensione 2 ed è generato dai vettori $(1,0,0)$ e $(0,1,-1)$. Quindi per $t = 1$ la matrice non è diagonalizzabile.
Per $t = 1/2$ la matrice A diventa

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si noti che questa matrice è simmetrica, quindi è certamente diagonalizzabile.

(d) Sappiamo che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A se e solo se la matrice A è simmetrica, il che avviene solo per $t = 1/2$. Abbiamo già visto che per $t = 1/2$ gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$. L'autospazio corrispondente all'autovalore 1 è generato dai vettori $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (0,0,1)$. L'autospazio corrispondente all'autovalore 0 è generato dal vettore $v_3 = (1,-1,0)$. Si noti che i vettori v_1, v_2, v_3 formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Per ottenere una base ortonormale è sufficiente dividere ciascun vettore per la sua norma, quindi una base ortonormale è data da $v_1/\sqrt{2}$, v_2, $v_3/\sqrt{2}$.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

(c) Dato $v = (2, -7, 8, -5)$ si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

Soluzione. (a) Dall'equazione di $U^\perp$ si ricava $x_1 = -4x_2 + 3x_3 - 2x_4$. Quindi $U^\perp$ ha dimensione 3 e una sua base è formata dai vettori $(-4, 1, 0, 0)$, $(3, 0, 1, 0)$, $(-2, 0, 0, 1)$.
Dall'equazione $x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0$ si deduce che il vettore $(1, 4, -3, 2)$ è perpendicolare a $U^\perp$, quindi tale vettore è una base di U.

(b) Per trovare l'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ mettiamo a sistema l'equazione di $U^\perp$ e l'equazione di V:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 - 2x_4 \\ x_3 = 3x_1 - 2x_4 \end{cases}$$

per cui una base di $U^\perp \cap V$ è formata dai vettori $v_1 = (1, 2, 3, 0)$ e $v_2 = (0, -2, -2, 1)$.
Ora trasformiamo questa base in una base ortogonale tramite il procedimento di Gram–Schmidt. Poniamo $v_1' = v_1$ e $v_2' = v_2 + \alpha v_1'$. Richiedendo che sia $v_1' \cdot v_2' = 0$ si trova $\alpha = 5/7$, quindi $v_2' = v_2 + \frac{5}{7}\, v_1$.

(c) Il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$ è la proiezione ortogonale di v su $U^\perp$. Scriviamo quindi $v = w + w'$, con $w \in U^\perp$ e $w' \in U$. Dato che U è generato dal vettore $(1, 4, -3, 2)$ si ha $w' = \lambda\,(1, 4, -3, 2)$. Pertanto $w = v - w' = (2 - \lambda, -7 - 4\lambda, 8 + 3\lambda, -5 - 2\lambda)$. Dato che $w \in U^\perp$ possiamo sostituire le coordinate di w nell'equazione di $U^\perp$. In questo modo si trova $\lambda = -2$ e quindi $w = (4, 1, 2, -1)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette $r: \begin{cases} 2x + y - 3z - 5 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$

(a) Si dica se r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene la retta r ed è parallelo a s.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ che interseca le rette r e s ed è ortogonale ad entrambe. Trovare i punti di minima distanza delle rette r e s.

Soluzione. (a) Mettendo a sistema le equazioni di r e s si ottiene un sistema privo di soluzioni, quindi r e s non sono incidenti. Due punti di r sono $R_1 = (1, 3, 0)$ e $R_2 = (4, 3, 2)$, quindi la retta r è parallela al vettore $v_r = R_2 - R_1 = (3, 0, 2)$. Un vettore direttore di s è $v_s = (1, 1, 1)$. I vettori v_r e v_s non sono paralleli, quindi r e s sono due rette sghembe.

(b) Consideriamo il fascio di piani di asse r:

$$\lambda\,(2x + y - 3z - 5) + \mu\,(y - 3) = 0.$$

Il vettore normale è $n = (2\lambda, \lambda + \mu, -3\lambda)$. Ponendo $n \cdot v_s = 0$ si trova $\mu = 0$, quindi il piano cercato ha equazione $2x + y - 3z - 5 = 0$.

(c) Un generico punto della retta r è $R = (1 + 3a, 3, 2a)$. Un generico punto della retta s è $S = (t - 1, t + 2, t + 3)$. Si ha quindi $\vec{RS} = (t - 3a - 2, t - 1, t - 2a + 3)$. Imponendo le condizioni $\vec{RS} \cdot v_r = 0$ e $\vec{RS} \cdot v_s = 0$ si trova $a = 0$ e $t = 0$. Quindi i punti di minima distanza delle rette r e s sono $R = (1, 3, 0)$ e $S = (-1, 2, 3)$.
La retta ℓ è la retta che passa per i punti $R = (1, 3, 0)$ e $S = (-1, 2, 3)$, quindi un suo vettore direttore è $v_\ell = R - S = (2, 1, -3)$. Le equazioni parametriche di ℓ sono quindi

$$\ell: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 0 - 3t \end{cases}$$