A

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2^o compitino — 17 giugno 2025

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & t & 2t-1 \\ 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire se per $t = 3$ la matrice A è diagonalizzabile nel campo dei **numeri complessi** [*la risposta deve essere giustificata*].

(b) Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori sono reali, specificando i casi in cui tali autovalori hanno molteplicità maggiore di 1.

(c) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali.

(d) Determinare il valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A e scrivere tale base.

Esercizio 2. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

(c) Dato $v = (2, -7, 8, -5)$ si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette $r : \begin{cases} 2x + y - 3z - 5 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$

(a) Si dica se r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene la retta r ed è parallelo a s.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ che interseca le rette r e s ed è ortogonale ad entrambe. Trovare i punti di minima distanza delle rette r e s.

B

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2º compitino — 17 giugno 2025

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & 2t-1 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-t & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire se per $t = 2$ la matrice A è diagonalizzabile nel campo dei **numeri complessi** [*la risposta deve essere giustificata*].

(b) Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori sono reali, specificando i casi in cui tali autovalori hanno molteplicità maggiore di 1.

(c) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali.

(d) Determinare il valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A e scrivere tale base.

Esercizio 2. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + x_4 = 0$.

(c) Dato $v = (0, 4, -3, 4)$ si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette $r : \begin{cases} 2x + y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t + 1 \end{cases}$

(a) Si dica se r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene la retta r ed è parallelo a s.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ che interseca le rette r e s ed è ortogonale ad entrambe. Trovare i punti di minima distanza delle rette r e s.

C

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2º compitino — 17 giugno 2025

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 2t-1 & t & t \end{pmatrix}$$

(a) Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire se per $t = 5$ la matrice A è diagonalizzabile nel campo dei **numeri complessi** [*la risposta deve essere giustificata*].

(b) Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori sono reali, specificando i casi in cui tali autovalori hanno molteplicità maggiore di 1.

(c) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali.

(d) Determinare il valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A e scrivere tale base.

Esercizio 2. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

(c) Dato $v = (-1, 3, 1, 5)$ si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette $r : \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t + 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$

(a) Si dica se r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene la retta r ed è parallelo a s.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ che interseca le rette r e s ed è ortogonale ad entrambe. Trovare i punti di minima distanza delle rette r e s.

D

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2º compitino — 17 giugno 2025

Esercizio 1. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 2t-1 & t \end{pmatrix}$$

(a) Trovare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire se per $t = 4$ la matrice A è diagonalizzabile nel campo dei **numeri complessi** [*la risposta deve essere giustificata*].

(b) Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori sono reali, specificando i casi in cui tali autovalori hanno molteplicità maggiore di 1.

(c) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali.

(d) Determinare il valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A e scrivere tale base.

Esercizio 2. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che $U^\perp$ ha equazione $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra $U^\perp$ e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + x_4 = 0$.

(c) Dato $v = (2, 5, -3, -7)$ si determini il vettore $w \in U^\perp$ che rende minima la norma di $v - w$.

Esercizio 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette $r : \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases}$

(a) Si dica se r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene la retta r ed è parallelo a s.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ che interseca le rette r e s ed è ortogonale ad entrambe. Trovare i punti di minima distanza delle rette r e s.