A

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2º appello — 8 luglio 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale consideriamo il sottospazio U di equazione $3x_1 + x_3 - 2x_4 = 0$.

(a) Trovare una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Dire se è possibile trovare un sottospazio vettoriale non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con U e anche con $U^\perp$. Se tale L esiste, trovarne una base.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0$. Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Trovare una base ortogonale di $U^\perp + W^\perp$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(v_1) = (-2, 2, -2, 4)$, $f(v_2) = (5, -1, -1, 0)$, $f(v_3) = (6, -2, 0, -2)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(b) Scrivere la matrice B di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$.

(c) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(d) Determinare per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ il vettore $w_t = (t, -1, -2, 1)$ appartiene all'immagine di f. Per tale valore di t determinare $f^{-1}(w_t)$.

(e) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità? [*la risposta deve essere giustificata*]

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -7 & t & -4 \\ 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A_t, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ tutti gli autovalori di A_t sono reali.

(b) Si ponga ora $t = -4$. Determinare gli autovalori e gli autospazi della matrice A_{-4} e stabilire se essa è diagonalizzabile.

(c) Si dica se A_{-4} è simile alla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ [*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*].

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $A = (3, -1, 0)$, $B = (1, 3, 1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + y - 3z - 7 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare il punto $H \in r$ di minima distanza dal punto A.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente i punti A, B e parallelo alla retta r.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per i punti A e B.

B

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2º appello — 8 luglio 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale consideriamo il sottospazio U di equazione $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$.

(a) Trovare una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Dire se è possibile trovare un sottospazio vettoriale non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con U e anche con $U^\perp$. Se tale L esiste, trovarne una base.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$. Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Trovare una base ortogonale di $U^\perp + W^\perp$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(v_1) = (2, 2, -2, 0)$, $f(v_2) = (3, -3, -1, 2)$, $f(v_3) = (0, -6, 2, 2)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(b) Scrivere la matrice B di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$.

(c) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(d) Determinare per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ il vettore $w_t = (t, 3, -1, -1)$ appartiene all'immagine di f. Per tale valore di t determinare $f^{-1}(w_t)$.

(e) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità? [*la risposta deve essere giustificata*]

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & t & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A_t, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ tutti gli autovalori di A_t sono reali.

(b) Si ponga ora $t = -6$. Determinare gli autovalori e gli autospazi della matrice A_{-6} e stabilire se essa è diagonalizzabile.

(c) Si dica se A_{-6} è simile alla matrice $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ [*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*].

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $A = (-1, 2, 1)$, $B = (3, 1, 3)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x - 4y + z - 1 = 0 \\ 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare il punto $H \in r$ di minima distanza dal punto A.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente i punti A, B e parallelo alla retta r.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per i punti A e B.

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2$^{\text{o}}$ appello — 8 luglio 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale consideriamo il sottospazio U di equazione $x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0$.

(a) Trovare una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Dire se è possibile trovare un sottospazio vettoriale non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con U e anche con $U^\perp$. Se tale L esiste, trovarne una base.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$. Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Trovare una base ortogonale di $U^\perp + W^\perp$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 1)$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(v_1) = (1, 1, 4, -3)$, $f(v_2) = (3, -4, -2, 5)$, $f(v_3) = (3, -3, 0, 3)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(b) Scrivere la matrice B di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$.

(c) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(d) Determinare per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ il vettore $w_t = (t, 1, 6, -4)$ appartiene all'immagine di f. Per tale valore di t determinare $f^{-1}(w_t)$.

(e) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità? [*la risposta deve essere giustificata*]

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ t & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A_t, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ tutti gli autovalori di A_t sono reali.

(b) Si ponga ora $t = 3$. Determinare gli autovalori e gli autospazi della matrice A_3 e stabilire se essa è diagonalizzabile.

(c) Si dica se A_3 è simile alla matrice $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ [*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*].

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $A = (2, 0, 1)$, $B = (4, 1, -1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare il punto $H \in r$ di minima distanza dal punto A.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente i punti A, B e parallelo alla retta r.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per i punti A e B.

D

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2º appello — 8 luglio 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale consideriamo il sottospazio U di equazione $2x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$.

(a) Trovare una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Dire se è possibile trovare un sottospazio vettoriale non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con U e anche con $U^\perp$. Se tale L esiste, trovarne una base.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $3x_1 - x_3 + 2x_4 = 0$. Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Trovare una base ortogonale di $U^\perp + W^\perp$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (2, 0, -1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(v_1) = (1, -3, -4, 5)$, $f(v_2) = (5, -1, -6, 4)$, $f(v_3) = (3, 3, 0, -3)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(b) Scrivere la matrice B di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$.

(c) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(d) Determinare per quale valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ il vettore $w_t = (t, 2, 2, -3)$ appartiene all'immagine di f. Per tale valore di t determinare $f^{-1}(w_t)$.

(e) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità? [*la risposta deve essere giustificata*]

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ t & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A_t, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ tutti gli autovalori di A_t sono reali.

(b) Si ponga ora $t = -2$. Determinare gli autovalori e gli autospazi della matrice A_{-2} e stabilire se essa è diagonalizzabile.

(c) Si dica se A_{-2} è simile alla matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ [*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*].

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $A = (1, 1, 2)$, $B = (3, 4, 3)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare il punto $H \in r$ di minima distanza dal punto A.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente i punti A, B e parallelo alla retta r.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per i punti A e B.