

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale consideriamo il sottospazio U di equazione $3x_1 + x_3 - 2x_4 = 0$.

- (a) Trovare una base di U e una base di $U^\perp$.
- (b) Dire se è possibile trovare un sottospazio vettoriale non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con U e anche con $U^\perp$. Se tale L esiste, trovarne una base.
- (c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0$. Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.
- (d) Trovare una base ortogonale di $U^\perp + W^\perp$.

Soluzione. (a) Dall'equazione di U si ricava $x_3 = -3x_1 + 2x_4$. Quindi U ha dimensione 3 e una sua base è formata dai vettori $(1, 0, -3, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 2, 1)$.

Dall'equazione $3x_1 + x_3 - 2x_4 = 0$ si deduce che il vettore $(3, 0, 1, -2)$ è perpendicolare a U , quindi tale vettore è una base di $U^\perp$.

(b) Esistono infiniti sottospazi L con le proprietà richieste. Un esempio è dato dal sottospazio L generato dal vettore $(0, 0, 0, 1)$.

(c) Per trovare una base di $U \cap W$ bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova

$$\begin{cases} x_2 = -6x_1 + 2x_4 \\ x_3 = -3x_1 + 2x_4 \end{cases}$$

per cui una base di $U \cap W$ è formata dai vettori $(1, -6, -3, 0)$ e $(0, 2, 2, 1)$.

Dalla formula di Grassmann si deduce che $\dim(U + W) = 4$, quindi $U + W = \mathbb{R}^4$ e come base di $U + W$ si può prendere la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(d) Un generatore di $U^\perp$ è $v_1 = (3, 0, 1, -2)$. Un generatore di $W^\perp$ è $v_2 = (0, 1, -2, 2)$. Quindi i vettori v_1 e v_2 formano una base di $U^\perp + W^\perp$.

Ora trasformiamo questa base in una base ortogonale tramite il procedimento di Gram-Schmidt. Poniamo $v'_1 = v_1$ e $v'_2 = v_2 + \alpha v'_1$. Richiedendo che sia $v'_1 \cdot v'_2 = 0$ si trova $\alpha = 3/7$, quindi $v'_2 = v_2 + \frac{3}{7}v_1$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$.

Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(v_1) = (-2, 2, -2, 4)$, $f(v_2) = (5, -1, -1, 0)$, $f(v_3) = (6, -2, 0, -2)$.

- (a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
- (b) Scrivere la matrice B di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$.
- (c) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- (d) Determinare per quale valore del parametro t il vettore $w_t = (t, -1, -2, 1)$ appartiene all'immagine di f . Per tale valore di t determinare $f^{-1}(w_t)$.
- (e) Esiste una funzione lineare $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia l'identità? [la risposta deve essere giustificata]

Soluzione. (a) La matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Si ha $e_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_3)$, quindi $f(e_1) = \frac{1}{2}(f(v_1) + f(v_3)) = (2, 0, -1, 1)$. Si ha $e_3 = \frac{1}{2}(v_3 - v_1)$, quindi $f(e_3) = \frac{1}{2}(f(v_3) - f(v_1)) = (4, -2, 1, -3)$. Si ha $e_2 = v_2 - e_3$, quindi $f(e_2) = f(v_2) - f(e_3) = (1, 1, -2, 3)$. Quindi la matrice B è

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) Il nucleo di f ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $(-3, 2, 1)$. Di conseguenza l'immagine di f ha dimensione 2 e una sua base è data da due colonne della matrice B (o da due colonne della matrice A).

(d) Il vettore $w_t = (t, -1, -2, 1)$ appartiene all'immagine di f se e solo se è combinazione lineare di due colonne della matrice B . Si trova che questo accade se e solo se $t = 7$. Per tale valore di t , risolvendo il sistema $BX = w_t$, si trova

$$f^{-1}(w_t) = (1, 1, 1) + \text{Ker } f.$$

(e) Dire che $g \circ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è l'identità significa che, per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$, si deve avere $(g \circ f)(v) = g(f(v)) = v$. Tuttavia, considerando il vettore $v = (-3, 2, 1)$ che appartiene al nucleo di f , si ha $(g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(\vec{0}) = \vec{0} \neq v$. Pertanto una tale funzione g non può esistere.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -7 & t & -4 \\ 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A_t , in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$. Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ tutti gli autovalori di A_t sono reali.
- (b) Si ponga ora $t = -4$. Determinare gli autovalori e gli autospazi della matrice A_{-4} e stabilire se essa è diagonalizzabile.
- (c) Si dica se A_{-4} è simile alla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ [la risposta deve essere adeguatamente giustificata].

Soluzione. (a) Il polinomio caratteristico di A_t è $-(x+1)(x^2 + 4x - 6t - 21)$ e gli autovalori sono -1 e $-2 \pm \sqrt{6t + 25}$. Gli autovalori sono reali se e solo se $6t + 25 \geq 0$, cioè $t \geq -25/6$.

(b) Per $t = -4$ la matrice diventa

$$A_{-4} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e gli autovalori sono -1 , -1 e -3 .

Per l'autovalore $\lambda_1 = -1$ (che ha molteplicità 2) si trova un autospazio di dimensione 2 generato dai vettori $v_1 = (-2, 0, 3)$ e $v_2 = (-2, 3, 0)$.

Per l'autovalore $\lambda_2 = -3$ (che ha molteplicità 1) si trova un autospazio di dimensione 1 generato dal vettore $v_3 = (-1, 1, 0)$.

Si conclude pertanto che la matrice A_{-4} è diagonalizzabile.

(c) La matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ha gli stessi autovalori -1 , -1 e -3 della matrice A_{-4} . Tuttavia, cercando gli autovettori per l'autovalore $\lambda_1 = -1$ si trova un autospazio di dimensione 1. Questo significa che questa matrice non è diagonalizzabile, quindi non può essere simile alla matrice A_{-4} che, invece, è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono assegnati i punti $A = (3, -1, 0)$, $B = (1, 3, 1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + y - 3z - 7 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare il punto $H \in r$ di minima distanza dal punto A .
- (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente i punti A , B e parallelo alla retta r .
- (c) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per A , contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per i punti A e B .

Soluzione. (a) Due punti della retta r sono $R_1 = (4, 3, 0)$ e $R_2 = (6, 4, 1)$, quindi un vettore direttore di r è $v_r = R_2 - R_1 = (2, 1, 1)$. Le coordinate di un generico punto X della retta r sono quindi $X = (4 + 2t, 3 + t, t)$. Il vettore $\vec{AX}$ è $\vec{AX} = X - A = (1 + 2t, 4 + t, t)$. Imponendo $\vec{AX} \cdot v_r = 0$ si trova $t = -1$, quindi il punto $H \in r$ di minima distanza dal punto A è $H = (2, 2, -1)$.

(b) Il vettore $\vec{AB}$ è $\vec{AB} = B - A = (-2, 4, 1)$. Il vettore $\vec{n}$ perpendicolare al piano π è $\vec{n} = \vec{AB} \times v_r = (3, 4, -10)$, quindi l'equazione cartesiana del piano π è del tipo $3x + 4y - 10z + d = 0$. Imponendo la condizione di passaggio per il punto A si trova $d = -5$, quindi il piano π ha equazione $3x + 4y - 10z - 5 = 0$.

(c) Il vettore direttore della retta s è $v_s = \vec{n} \times \vec{AB} = (44, 17, 20)$. Quindi le equazioni parametriche di s sono

$$s : \begin{cases} x = 3 + 44t \\ y = -1 + 17t \\ z = 20t \end{cases}$$