Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Sia W uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Sia $f: V \rightarrow W$ la funzione lineare definita da

$$f(v_1) = -w_2 + 2w_3 + w_4, \quad f(v_2) = 2w_1 + w_2 - w_3, \quad f(v_3) = 6w_1 + w_2 + w_3 + 2w_4.$$

- Scrivere la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$.
- Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- Sia $w_a = 4w_1 - w_2 + 4w_3 + aw_4$. Trovare il valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che $w_a \in \text{Im}(f)$.
- Trovare una base $\{v'_1, v'_2\}$ di un sottospazio $V' \subset V$ e una base $\{w'_1, w'_2\}$ di un sottospazio $W' \subset W$ tali che la matrice (rispetto a tali basi) della funzione $g: V' \rightarrow W'$ definita ponendo $g(v) = f(v)$ sia la matrice identica.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia V il sottospazio di equazione $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ e sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (0, 1, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, -2, 0)$.

- Determinare una base ortogonale di U .
- Determinare una base di $U^\perp$.
- Determinare una base di un sottospazio $W \subset U^\perp$ tale che $V = U \oplus W$.
- Dato il vettore $v_t = (4, t, -5, 3)$, si determini per quale valore di t è possibile scrivere $v_t = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Si trovino inoltre esplicitamente tali vettori u e w .

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -10 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

- Determinare per quale valore di t la matrice A non è invertibile.
- Determinare per quale valore di t il vettore $v = (2, -1, -1)$ è un autovettore di A . Chi è l'autovalore corrispondente?
- Per il valore di t trovato nel punto (b) si determinino gli autovalori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale consideriamo il piano π di equazione $3x - y + z + 2 = 0$ e i punti $A = (0, 0, -2)$ e $B = (0, 2, 0)$.

- Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $R = (1, -2, 3)$ e parallela alla retta passante per A e B .
- Dato il punto $P = (5, -1, 4)$ determinare il punto sul piano π di minima distanza da P . Determinare inoltre il punto P' simmetrico di P rispetto al piano π .
- Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B , contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B .
- Trovare le equazioni (parametriche o cartesiane) che descrivono l'insieme dei punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia isoscele, di base AB .

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Sia W uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Sia $f: V \rightarrow W$ la funzione lineare definita da

$$f(v_1) = 2w_1 - w_3 - 2w_4, \quad f(v_2) = w_1 + w_2 - 2w_4, \quad f(v_3) = w_1 - 3w_2 - 2w_3 + 2w_4.$$

- Scrivere la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$.
- Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- Sia $w_a = 4w_1 - 2w_2 + aw_3 - 2w_4$. Trovare il valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che $w_a \in \text{Im}(f)$.
- Trovare una base $\{v'_1, v'_2\}$ di un sottospazio $V' \subset V$ e una base $\{w'_1, w'_2\}$ di un sottospazio $W' \subset W$ tali che la matrice (rispetto a tali basi) della funzione $g: V' \rightarrow W'$ definita ponendo $g(v) = f(v)$ sia la matrice identica.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia V il sottospazio di equazione $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$ e sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -1, 0, 1)$, $u_2 = (0, -2, 1, 1)$.

- Determinare una base ortogonale di U .
- Determinare una base di $U^\perp$.
- Determinare una base di un sottospazio $W \subset U^\perp$ tale che $V = U \oplus W$.
- Dato il vettore $v_t = (4, 0, t, 5)$, si determini per quale valore di t è possibile scrivere $v_t = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Si trovino inoltre esplicitamente tali vettori u e w .

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 6 & -4 & 6 \\ 4 & t & 1 \end{pmatrix}$$

- Determinare per quale valore di t la matrice A non è invertibile.
- Determinare per quale valore di t il vettore $v = (-2, 2, 3)$ è un autovettore di A . Chi è l'autovalore corrispondente?
- Per il valore di t trovato nel punto (b) si determinino gli autovalori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale consideriamo il piano π di equazione $2x - y + 4z - 4 = 0$ e i punti $A = (0, -4, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$.

- Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $R = (3, -2, 1)$ e parallela alla retta passante per A e B .
- Dato il punto $P = (0, 5, -3)$ determinare il punto sul piano π di minima distanza da P . Determinare inoltre il punto P' simmetrico di P rispetto al piano π .
- Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B , contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B .
- Trovare le equazioni (parametriche o cartesiane) che descrivono l'insieme dei punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia isoscele, di base AB .

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3° appello — 17 settembre 2025

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Sia W uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Sia $f: V \rightarrow W$ la funzione lineare definita da

$$f(v_1) = w_1 + 2w_2 - 2w_3, \quad f(v_2) = -2w_1 + w_3 + w_4, \quad f(v_3) = -w_1 + 6w_2 - 4w_3 + 2w_4.$$

- Scrivere la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$.
- Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- Sia $w_a = -4w_1 + aw_2 - w_3 + 3w_4$. Trovare il valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che $w_a \in \text{Im}(f)$.
- Trovare una base $\{v'_1, v'_2\}$ di un sottospazio $V' \subset V$ e una base $\{w'_1, w'_2\}$ di un sottospazio $W' \subset W$ tali che la matrice (rispetto a tali basi) della funzione $g: V' \rightarrow W'$ definita ponendo $g(v) = f(v)$ sia la matrice identica.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia V il sottospazio di equazione $2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0$ e sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -1, 1)$, $u_2 = (2, 1, 0, 1)$.

- Determinare una base ortogonale di U .
- Determinare una base di $U^\perp$.
- Determinare una base di un sottospazio $W \subset U^\perp$ tale che $V = U \oplus W$.
- Dato il vettore $v_t = (5, 4, -3, t)$, si determini per quale valore di t è possibile scrivere $v_t = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Si trovino inoltre esplicitamente tali vettori u e w .

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Determinare per quale valore di t la matrice A non è invertibile.
- Determinare per quale valore di t il vettore $v = (1, -1, -2)$ è un autovettore di A . Chi è l'autovalore corrispondente?
- Per il valore di t trovato nel punto (b) si determinino gli autovalori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale consideriamo il piano π di equazione $2x - 3y + z + 4 = 0$ e i punti $A = (-2, 0, 0)$ e $B = (0, 0, -4)$.

- Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $R = (2, -2, 1)$ e parallela alla retta passante per A e B .
- Dato il punto $P = (3, -4, 6)$ determinare il punto sul piano π di minima distanza da P . Determinare inoltre il punto P' simmetrico di P rispetto al piano π .
- Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B , contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B .
- Trovare le equazioni (parametriche o cartesiane) che descrivono l'insieme dei punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia isoscele, di base AB .

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Sia W uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Sia $f: V \rightarrow W$ la funzione lineare definita da

$$f(v_1) = 2w_1 + 2w_2 - w_4, \quad f(v_2) = w_2 - 2w_3 - 2w_4, \quad f(v_3) = 6w_1 + 4w_2 + 4w_3 + w_4.$$

- Scrivere la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$.
- Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- Sia $w_a = a w_1 + w_2 + 6w_3 + 4w_4$. Trovare il valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che $w_a \in \text{Im}(f)$.
- Trovare una base $\{v'_1, v'_2\}$ di un sottospazio $V' \subset V$ e una base $\{w'_1, w'_2\}$ di un sottospazio $W' \subset W$ tali che la matrice (rispetto a tali basi) della funzione $g: V' \rightarrow W'$ definita ponendo $g(v) = f(v)$ sia la matrice identica.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia V il sottospazio di equazione $x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$ e sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 2, 1, 1)$.

- Determinare una base ortogonale di U .
- Determinare una base di $U^\perp$.
- Determinare una base di un sottospazio $W \subset U^\perp$ tale che $V = U \oplus W$.
- Dato il vettore $v_t = (0, t, 5, -7)$, si determini per quale valore di t è possibile scrivere $v_t = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Si trovino inoltre esplicitamente tali vettori u e w .

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ t & -1 & -4 \\ -4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

- Determinare per quale valore di t la matrice A non è invertibile.
- Determinare per quale valore di t il vettore $v = (2, 1, -2)$ è un autovettore di A . Chi è l'autovalore corrispondente?
- Per il valore di t trovato nel punto (b) si determinino gli autovalori di A e si dica se A è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale consideriamo il piano π di equazione $x + 2y - 3z - 3 = 0$ e i punti $A = (3, 0, 0)$ e $B = (0, 0, -1)$.

- Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $R = (1, 3, -1)$ e parallela alla retta passante per A e B .
- Dato il punto $P = (-3, 2, 4)$ determinare il punto sul piano π di minima distanza da P . Determinare inoltre il punto P' simmetrico di P rispetto al piano π .
- Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B , contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B .
- Trovare le equazioni (parametriche o cartesiane) che descrivono l'insieme dei punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia isoscele, di base AB .