

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4° appello — 3 febbraio 2026

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 3, 1)$, $u_2 = (4, 0, 2, -1)$, $u_3 = (-2, -3, \alpha, 5)$.

- Determinare la dimensione e una base di U al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Poniamo $\alpha = 5$. Scrivere le equazioni cartesiane di U .
- Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e $5x_2 + x_3 = 0$. Trovare la dimensione e una base di W .
- Per $\alpha = 5$, trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - x_4, -4x_2 + x_3 + 2x_4, -2x_1 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_4).$$

- Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, ridurla in forma a scala e trovare il rango.
- Trovare una base di $\text{Ker } f$, una base di $\text{Im } f$ e dire per quale valore di α il vettore $(1, 1, -3, \alpha)$ appartiene a $\text{Im } f$.
- Verificare che la prima colonna c_1 di A appartiene a $\text{Ker } f$. Possiamo dire che $\text{Ker } f + \text{Im } f = \mathbb{R}^4$? Perché?
- Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori e_1, e_2 della base canonica. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dalle prime due colonne c_1, c_2 di A . Indichiamo con $g: U \rightarrow W$ la restrizione di f , cioè g è definita da $g(u) = f(u)$, per ogni $u \in U$. Scrivere la matrice di g rispetto alle basi $\{e_1, e_2\}$ di U e $\{c_1, c_2\}$ di W .

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

- Determinare per quale valore di α la matrice **non** è invertibile.
- Ora poniamo $\alpha = 2$ fino alla fine dell'esercizio. Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A .
- Trovare una base degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.
- È possibile stabilire se A è diagonalizzabile senza calcolare autovalori e autovettori? Perché?

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono assegnati il piano π di equazione $2x + y - z = 3$ e la retta ℓ di equazioni

$$\ell: \begin{cases} 3x - y = 0 \\ \alpha x - z = 0 \end{cases}$$

- Determinare per quale valore di α la retta ℓ è parallela al piano π .
- Per il valore di α trovato al punto (a) calcolare la distanza di ℓ da π .
- Sia σ il piano passante per il punto $P = (3, -2, 0)$ e parallelo ai vettori $u_1 = (0, 1, 2)$ e $u_2 = (1, -2, -1)$. Trovare le equazioni parametriche della retta $r = \sigma \cap \pi$.
- Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per $P = (3, -2, 0)$, contenuta nel piano σ e perpendicolare alla retta r .

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4° appello — 3 febbraio 2026

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -3, 0, -1)$, $u_2 = (-1, 1, 2, 2)$, $u_3 = (1, -3, \alpha, 4)$.

- Determinare la dimensione e una base di U al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Poniamo $\alpha = 6$. Scrivere le equazioni cartesiane di U .
- Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ e $2x_1 - x_3 = 0$. Trovare la dimensione e una base di W .
- Per $\alpha = 6$, trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 - x_2 + 2x_3, 3x_1 + x_2 - 2x_4, x_1 + x_2 - 2x_3, x_2 - 3x_3 + x_4).$$

- Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, ridurla in forma a scala e trovare il rango.
- Trovare una base di $\text{Ker } f$, una base di $\text{Im } f$ e dire per quale valore di α il vettore $(1, 3, -1, \alpha)$ appartiene a $\text{Im } f$.
- Verificare che la prima colonna c_1 di A appartiene a $\text{Ker } f$. Possiamo dire che $\text{Ker } f + \text{Im } f = \mathbb{R}^4$? Perché?
- Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori e_1, e_2 della base canonica. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dalle prime due colonne c_1, c_2 di A . Indichiamo con $g: U \rightarrow W$ la restrizione di f , cioè g è definita da $g(u) = f(u)$, per ogni $u \in U$. Scrivere la matrice di g rispetto alle basi $\{e_1, e_2\}$ di U e $\{c_1, c_2\}$ di W .

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

- Determinare per quale valore di α la matrice **non** è invertibile.
- Ora poniamo $\alpha = 2$ fino alla fine dell'esercizio. Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A .
- Trovare una base degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.
- È possibile stabilire se A è diagonalizzabile senza calcolare autovalori e autovettori? Perché?

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono assegnati il piano π di equazione $x + 3y - 2z = 2$ e la retta ℓ di equazioni

$$\ell : \begin{cases} x - 3y = 0 \\ \alpha y - z = 0 \end{cases}$$

- Determinare per quale valore di α la retta ℓ è parallela al piano π .
- Per il valore di α trovato al punto (a) calcolare la distanza di ℓ da π .
- Sia σ il piano passante per il punto $P = (1, 2, 3)$ e parallelo ai vettori $u_1 = (1, 0, 1)$ e $u_2 = (1, 1, 3)$. Trovare le equazioni parametriche della retta $r = \sigma \cap \pi$.
- Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per $P = (1, 2, 3)$, contenuta nel piano σ e perpendicolare alla retta r .

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4° appello — 3 febbraio 2026

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (4, 2, 0, -1)$, $u_2 = (-2, -3, 1, -1)$, $u_3 = (2, -5, \alpha, -5)$.

- Determinare la dimensione e una base di U al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Poniamo $\alpha = 3$. Scrivere le equazioni cartesiane di U .
- Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ e $x_2 + 5x_3 = 0$. Trovare la dimensione e una base di W .
- Per $\alpha = 3$, trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_3 - x_4, -2x_1 - x_2, x_2 - 4x_3 + 2x_4, x_1 + 2x_3 - x_4).$$

- Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, ridurla in forma a scala e trovare il rango.
- Trovare una base di $\text{Ker } f$, una base di $\text{Im } f$ e dire per quale valore di α il vettore $(1, \alpha, 1, 1)$ appartiene a $\text{Im } f$.
- Verificare che la prima colonna c_1 di A appartiene a $\text{Ker } f$. Possiamo dire che $\text{Ker } f + \text{Im } f = \mathbb{R}^4$? Perché?
- Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori e_1, e_2 della base canonica. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dalle prime due colonne c_1, c_2 di A . Indichiamo con $g: U \rightarrow W$ la restrizione di f , cioè g è definita da $g(u) = f(u)$, per ogni $u \in U$. Scrivere la matrice di g rispetto alle basi $\{e_1, e_2\}$ di U e $\{c_1, c_2\}$ di W .

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

- Determinare per quale valore di α la matrice **non** è invertibile.
- Ora poniamo $\alpha = 1$ fino alla fine dell'esercizio. Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A .
- Trovare una base degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.
- È possibile stabilire se A è diagonalizzabile senza calcolare autovalori e autovettori? Perché?

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono assegnati il piano π di equazione $x - 2y - z = -3$ e la retta ℓ di equazioni

$$\ell: \begin{cases} x - \alpha y = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

- Determinare per quale valore di α la retta ℓ è parallela al piano π .
- Per il valore di α trovato al punto (a) calcolare la distanza di ℓ da π .
- Sia σ il piano passante per il punto $P = (0, 3, -2)$ e parallelo ai vettori $u_1 = (2, 0, 1)$ e $u_2 = (-1, 1, -2)$. Trovare le equazioni parametriche della retta $r = \sigma \cap \pi$.
- Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per $P = (0, 3, -2)$, contenuta nel piano σ e perpendicolare alla retta r .

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4° appello — 3 febbraio 2026

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -2, -1, -2)$, $u_2 = (2, 0, -3, -1)$, $u_3 = (1, 6, \alpha, 4)$.

- (a) Determinare la dimensione e una base di U al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (b) Poniamo $\alpha = -3$. Scrivere le equazioni cartesiane di U .
- (c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ e $2x_1 - x_2 = 0$. Trovare la dimensione e una base di W .
- (d) Per $\alpha = -3$, trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 + 2x_3 - x_4, x_2 - 3x_3 + x_4, x_1 - 2x_3 + x_4, 3x_1 - 2x_2 + x_4).$$

- (a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, ridurla in forma a scala e trovare il rango.
- (b) Trovare una base di $\text{Ker } f$, una base di $\text{Im } f$ e dire per quale valore di α il vettore $(1, -3, \alpha, 3)$ appartiene a $\text{Im } f$.
- (c) Verificare che la prima colonna c_1 di A appartiene a $\text{Ker } f$. Possiamo dire che $\text{Ker } f + \text{Im } f = \mathbb{R}^4$? Perché?
- (d) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori e_1, e_2 della base canonica. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dalle prime due colonne c_1, c_2 di A . Indichiamo con $g: U \rightarrow W$ la restrizione di f , cioè g è definita da $g(u) = f(u)$, per ogni $u \in U$. Scrivere la matrice di g rispetto alle basi $\{e_1, e_2\}$ di U e $\{c_1, c_2\}$ di W .

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare per quale valore di α la matrice **non** è invertibile.
- (b) Ora poniamo $\alpha = 3$ fino alla fine dell'esercizio. Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A .
- (c) Trovare una base degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.
- (d) È possibile stabilire se A è diagonalizzabile senza calcolare autovalori e autovettori? Perché?

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono assegnati il piano π di equazione $2x - y - 3z = -2$ e la retta ℓ di equazioni

$$\ell: \begin{cases} x - \alpha z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare per quale valore di α la retta ℓ è parallela al piano π .
- (b) Per il valore di α trovato al punto (a) calcolare la distanza di ℓ da π .
- (c) Sia σ il piano passante per il punto $P = (3, 1, 2)$ e parallelo ai vettori $u_1 = (1, 1, 0)$ e $u_2 = (3, 1, 1)$. Trovare le equazioni parametriche della retta $r = \sigma \cap \pi$.
- (d) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per $P = (3, 1, 2)$, contenuta nel piano σ e perpendicolare alla retta r .