

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4° appello — 3 febbraio 2026

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 3, 1)$, $u_2 = (4, 0, 2, -1)$, $u_3 = (-2, -3, \alpha, 5)$.

- (a) Determinare la dimensione e una base di U al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (b) Poniamo $\alpha = 5$. Scrivere le equazioni cartesiane di U .
- (c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e $5x_2 + x_3 = 0$. Trovare la dimensione e una base di W .
- (d) Per $\alpha = 5$, trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Soluzione. (a) Organizziamo i vettori u_1, u_2, u_3 sotto forma di matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & \alpha & 5 \end{pmatrix}$$

Riducendo questa matrice in forma a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & \alpha - 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Da ciò si deduce che $\dim U = 2$ se $\alpha = 5$ e in questo caso una base di U è formata dai vettori u_1 e u_2 . Invece, se $\alpha \neq 5$, $\dim U = 3$ e una base di U è formata dai vettori u_1, u_2 e u_3 .

(b) Per $\alpha = 5$ una base di U è formata dai vettori u_1 e u_2 . Quindi se indichiamo con (x_1, x_2, x_3, x_4) un generico vettore di U , si deve avere

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = au_1 + bu_2.$$

Eliminando i parametri a e b si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_4 = 0 \\ 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

che sono quindi le equazioni cartesiane di U .

(c) Risolvendo le equazioni di W si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = -6x_2 \\ x_3 = -5x_2 \end{cases}$$

Le incognite x_2 e x_4 sono libere di variare, quindi $\dim W = 2$ e una base di W è formata dai vettori $w_1 = (-6, 1, -5, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 0, 1)$.

(d) Per determinare $U \cap W$ basta mettere a sistema le equazioni di U con quelle di W :

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_4 = 0 \\ 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 = -6x_2 \\ x_3 = -5x_2 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = -6x_2 \\ x_3 = -5x_2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

quindi $\dim(U \cap W) = 1$ e una base è formata dal vettore $(-6, 1, -5, 0)$.

Dalla formula di Grassmann si deduce che $\dim(U + W) = 3$ e quindi una base di $U + W$ è formata dai vettori u_1, u_2, w_2 (si verifica facilmente che questi vettori sono linearmente indipendenti).

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - x_4, -4x_2 + x_3 + 2x_4, -2x_1 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_4).$$

- Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, ridurla in forma a scala e trovare il rango.
- Trovare una base di $\text{Ker } f$, una base di $\text{Im } f$ e dire per quale valore di α il vettore $(1, 1, -3, \alpha)$ appartiene a $\text{Im } f$.
- Verificare che la prima colonna c_1 di A appartiene a $\text{Ker } f$. Possiamo dire che $\text{Ker } f + \text{Im } f = \mathbb{R}^4$? Perché?
- Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori e_1, e_2 della base canonica. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dalle prime due colonne c_1, c_2 di A . Indichiamo con $g: U \rightarrow W$ la restrizione di f , cioè g è definita da $g(u) = f(u)$, per ogni $u \in U$. Scrivere la matrice di g rispetto alle basi $\{e_1, e_2\}$ di U e $\{c_1, c_2\}$ di W .

Soluzione. (a) Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Riducendo questa matrice in forma a scala si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi il rango è 2.

(b) Dato che il rango è 2 si ha $\dim \text{Im } f = 2$ e una base di $\text{Im } f$ è formata dalle prime due colonne di A . Il nucleo di f è formato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Si ricava

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 \\ x_3 = 4x_2 - 2x_4 \end{cases}$$

da cui si deduce che $\dim \text{Ker } f = 2$ e una base del nucleo di f è formata dai vettori $(-2, 1, 4, 0)$ e $(1, 0, -2, 1)$.

Il vettore $(1, 1, -3, \alpha)$ appartiene a $\text{Im } f$ se si può scrivere come combinazione lineare dei vettori della base di $\text{Im } f$, cioè delle prime due colonne di A . Da questa equazione si ricava $\alpha = 1$.

(c) La prima colonna $c_1 = (1, 0, -2, 1)$ è uno dei vettori della base di $\text{Ker } f$, quindi appartiene a $\text{Ker } f$. Però la prima colonna è anche uno dei vettori della base di $\text{Im } f$, quindi $c_1 \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ e pertanto $\dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f) \geq 1$. Dalla formula di Grassmann segue allora che $\dim(\text{Ker } f + \text{Im } f) \leq 3$, quindi non è vero che $\text{Ker } f + \text{Im } f = \mathbb{R}^4$.

(d) Si ha $g(e_1) = f(e_1) = c_1$ e $g(e_2) = f(e_2) = c_2$. Ricordando come si costruisce la matrice di g rispetto alle basi $\{e_1, e_2\}$ di U e $\{c_1, c_2\}$ di W , si deduce che la matrice di g è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare per quale valore di α la matrice **non** è invertibile.
- (b) Ora poniamo $\alpha = 2$ fino alla fine dell'esercizio. Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A .
- (c) Trovare una base degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.
- (d) È possibile stabilire se A è diagonalizzabile senza calcolare autovalori e autovettori? Perché?

Soluzione. (a) La matrice A **non** è invertibile quando $\det A = 0$. Si ha $\det A = 6\alpha - 3$, quindi $\det A = 0$ per $\alpha = 1/2$.

(b) Per $\alpha = 2$ il polinomio caratteristico è $(\lambda^2 - 4\lambda + 3)^2$, quindi gli autovalori sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$, entrambi con molteplicità 2.

(c) Per l'autovalore $\lambda = 1$ una base dell'autospazio è formata dai vettori $(1, 0, 0, -1)$ e $(0, 1, -1, 0)$.

Per l'autovalore $\lambda = 3$ una base dell'autospazio è formata dai vettori $(1, 0, 0, 1)$ e $(0, 1, 1, 0)$.

Da ciò si deduce che A è diagonalizzabile.

(d) Osserviamo che la matrice A è simmetrica, cioè $A^T = A$. Dalla teoria sappiamo che una matrice simmetrica ha sempre autovalori reali ed è sempre diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono assegnati il piano π di equazione $2x + y - z = 3$ e la retta ℓ di equazioni

$$\ell : \begin{cases} 3x - y = 0 \\ \alpha x - z = 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare per quale valore di α la retta ℓ è parallela al piano π .
- (b) Per il valore di α trovato al punto (a) calcolare la distanza di ℓ da π .
- (c) Sia σ il piano passante per il punto $P = (3, -2, 0)$ e parallelo ai vettori $u_1 = (0, 1, 2)$ e $u_2 = (1, -2, -1)$. Trovare le equazioni parametriche della retta $r = \sigma \cap \pi$.
- (d) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per $P = (3, -2, 0)$, contenuta nel piano σ e perpendicolare alla retta r .

Soluzione. (a) Mettendo a sistema le equazioni di ℓ con l'equazione di π per cercare il punto in cui la retta ℓ interseca il piano, si trova che il sistema non ha soluzione per $\alpha = 5$. Questo significa che per $\alpha = 5$ la retta e il piano sono paralleli.

(b) Per $\alpha = 5$ la retta ℓ è parallela al piano π , quindi la distanza di ℓ da π è la distanza da π di un punto qualunque di ℓ , ad esempio il punto $(0, 0, 0)$. Usando la formula per la distanza di un punto da un piano si trova che tale distanza è $3/\sqrt{6}$.

(c) Il vettore n_σ perpendicolare al piano σ è $n_\sigma = u_1 \times u_2 = (3, 2, -1)$, quindi l'equazione del piano σ è del tipo $3x + 2y - z = d$. Imponendo il passaggio per il punto P si trova $d = 5$, quindi l'equazione di σ è $3x + 2y - z = 5$. Le equazioni della retta $r = \sigma \cap \pi$ si ottengono mettendo a sistema le equazioni di σ e di π . Si ottiene

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

(d) Il vettore direttore della retta r è $v_r = (1, -1, 1)$. Il vettore direttore della retta s è dato da $v_s = n_\sigma \times v_r = (1, -4, -5)$. Da ciò si deduce che le equazioni parametriche della retta s sono

$$s : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = -5t \end{cases}$$