

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° Compitino — 10 aprile 2026

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^4$  sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (1, -2, 0, 1)$ ,  $u_2 = (-1, 1, 2, 0)$ ,  $u_3 = (0, 3, 1, -1)$ .

(a) Verificare che  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$  è una base di  $U$ . Quali sono le coordinate del vettore  $u_1 + u_2 + u_3$  nella base  $\mathcal{B}$ ?

(b) Sia  $W \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio di equazioni  $W : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Trovare la dimensione e una base di  $W$ .

(c) Trovare una base di  $U \cap W$  e una base di  $U + W$ .

(d) Trovare una base di un sottospazio  $U' \subset U$  tale che  $U' \oplus W = \mathbb{R}^4$ .

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4a^2 & -1 \\ -1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il rango di  $A$  al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ .

(b) Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema  $AX = 0$  al variare di  $a$ .

(c) Poniamo  $a = 1$  e consideriamo il vettore colonna  $B = (b_1, b_2, b_3)$ . Che relazione deve esistere tra le variabili  $b_1, b_2, b_3$  se vogliamo che il sistema  $AX = B$  abbia soluzioni?

(d) Poniamo  $a = -1$  e consideriamo il vettore colonna  $C = (2, 7, c)$ . Trovare il valore di  $c$  per cui il sistema  $AX = C$  ha soluzioni e, per tale valore di  $c$ , trovare tutte le soluzioni di tale sistema.

**Esercizio 3.** Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -x_1 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .

(b) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di  $f$ .  $f$  è iniettiva?  $f$  è suriettiva?

(c) Per quale valore di  $\alpha$  il vettore  $w = (1, 3, -1, \alpha)$  appartiene all'immagine di  $f$ ?

(d) Per il valore di  $\alpha$  trovato al punto (c) determinare  $f^{-1}(w)$ .

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° Compitino — 10 aprile 2026

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^4$  sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (2, 0, -1, 2)$ ,  $u_2 = (2, 1, 2, 0)$ ,  $u_3 = (0, -2, 1, 3)$ .

(a) Verificare che  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$  è una base di  $U$ . Quali sono le coordinate del vettore  $u_1 - u_2 + u_3$  nella base  $\mathcal{B}$ ?

(b) Sia  $W \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio di equazioni  $W : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

Trovare la dimensione e una base di  $W$ .

(c) Trovare una base di  $U \cap W$  e una base di  $U + W$ .

(d) Trovare una base di un sottospazio  $U' \subset U$  tale che  $U' \oplus W = \mathbb{R}^4$ .

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -4 & a^2 & 3 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il rango di  $A$  al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ .

(b) Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema  $AX = 0$  al variare di  $a$ .

(c) Poniamo  $a = -2$  e consideriamo il vettore colonna  $B = (b_1, b_2, b_3)$ . Che relazione deve esistere tra le variabili  $b_1, b_2, b_3$  se vogliamo che il sistema  $AX = B$  abbia soluzioni?

(d) Poniamo  $a = 2$  e consideriamo il vettore colonna  $C = (-3, 2, c)$ . Trovare il valore di  $c$  per cui il sistema  $AX = C$  ha soluzioni e, per tale valore di  $c$ , trovare tutte le soluzioni di tale sistema.

**Esercizio 3.** Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 - x_4 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .

(b) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di  $f$ .  $f$  è iniettiva?  $f$  è suriettiva?

(c) Per quale valore di  $\alpha$  il vettore  $w = (-2, 3, 3, \alpha)$  appartiene all'immagine di  $f$ ?

(d) Per il valore di  $\alpha$  trovato al punto (c) determinare  $f^{-1}(w)$ .

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° Compitino — 10 aprile 2026

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^4$  sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (1, 0, -2, -1)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0, -2)$ ,  $u_3 = (0, -1, 1, 3)$ .

(a) Verificare che  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$  è una base di  $U$ . Quali sono le coordinate del vettore  $u_1 + u_2 - u_3$  nella base  $\mathcal{B}$ ?

(b) Sia  $W \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio di equazioni  $W : \begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Trovare la dimensione e una base di  $W$ .

(c) Trovare una base di  $U \cap W$  e una base di  $U + W$ .

(d) Trovare una base di un sottospazio  $U' \subset U$  tale che  $U' \oplus W = \mathbb{R}^4$ .

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 6a^2 & 2 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il rango di  $A$  al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ .

(b) Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema  $AX = 0$  al variare di  $a$ .

(c) Poniamo  $a = -1$  e consideriamo il vettore colonna  $B = (b_1, b_2, b_3)$ . Che relazione deve esistere tra le variabili  $b_1, b_2, b_3$  se vogliamo che il sistema  $AX = B$  abbia soluzioni?

(d) Poniamo  $a = 1$  e consideriamo il vettore colonna  $C = (-2, 3, c)$ . Trovare il valore di  $c$  per cui il sistema  $AX = C$  ha soluzioni e, per tale valore di  $c$ , trovare tutte le soluzioni di tale sistema.

**Esercizio 3.** Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .

(b) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di  $f$ .  $f$  è iniettiva?  $f$  è suriettiva?

(c) Per quale valore di  $\alpha$  il vettore  $w = (-2, 4, 1, \alpha)$  appartiene all'immagine di  $f$ ?

(d) Per il valore di  $\alpha$  trovato al punto (c) determinare  $f^{-1}(w)$ .

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° Compitino — 10 aprile 2026

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^4$  sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (1, 0, -2, -2)$ ,  $u_2 = (1, -2, 0, 3)$ ,  $u_3 = (2, 1, 2, 0)$ .

(a) Verificare che  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$  è una base di  $U$ . Quali sono le coordinate del vettore  $u_1 - u_2 - u_3$  nella base  $\mathcal{B}$ ?

(b) Sia  $W \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio di equazioni  $W : \begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

Trovare la dimensione e una base di  $W$ .

(c) Trovare una base di  $U \cap W$  e una base di  $U + W$ .

(d) Trovare una base di un sottospazio  $U' \subset U$  tale che  $U' \oplus W = \mathbb{R}^4$ .

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & a^2 & -1 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il rango di  $A$  al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ .

(b) Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema  $AX = 0$  al variare di  $a$ .

(c) Poniamo  $a = 2$  e consideriamo il vettore colonna  $B = (b_1, b_2, b_3)$ . Che relazione deve esistere tra le variabili  $b_1, b_2, b_3$  se vogliamo che il sistema  $AX = B$  abbia soluzioni?

(d) Poniamo  $a = -2$  e consideriamo il vettore colonna  $C = (5, -4, c)$ . Trovare il valore di  $c$  per cui il sistema  $AX = C$  ha soluzioni e, per tale valore di  $c$ , trovare tutte le soluzioni di tale sistema.

**Esercizio 3.** Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .

(b) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di  $f$ .  $f$  è iniettiva?  $f$  è suriettiva?

(c) Per quale valore di  $\alpha$  il vettore  $w = (1, 6, 3, \alpha)$  appartiene all'immagine di  $f$ ?

(d) Per il valore di  $\alpha$  trovato al punto (c) determinare  $f^{-1}(w)$ .