

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° Compitino — 10 aprile 2026

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^4$  sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (1, -2, 0, 1)$ ,  $u_2 = (-1, 1, 2, 0)$ ,  $u_3 = (0, 3, 1, -1)$ .

- (a) Verificare che  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$  è una base di  $U$ . Quali sono le coordinate del vettore  $u_1 + u_2 + u_3$  nella base  $\mathcal{B}$ ?
- (b) Sia  $W \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio di equazioni  $W : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$
- Trovare la dimensione e una base di  $W$ .
- (c) Trovare una base di  $U \cap W$  e una base di  $U + W$ .
- (d) Trovare una base di un sottospazio  $U' \subset U$  tale che  $U' \oplus W = \mathbb{R}^4$ .

**Soluzione.** (a) Organizzando i vettori in una matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e riducendola in forma a scala si trova che il rango è 3, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di  $U$ .

Si ha  $u_1 + u_2 + u_3 = 1u_1 + 1u_2 + 1u_3$ , quindi le coordinate di questo vettore nella base  $\mathcal{B}$  sono  $(1, 1, 1)$ .

(b) Dalle equazioni di  $W$  si ricava

$$W : \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

quindi ci sono infinite soluzioni per ogni  $x_3$  e per ogni  $x_4$ . Pertanto  $\dim W = 2$  e una base è formata dai vettori  $w_1 = (1, 1, 1, 0)$  e  $w_2 = (0, 0, 0, 1)$ .

(c) Sia  $v \in U \cap W$ . Dato che  $v \in U$  si ha  $v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ . Richiedendo che  $v$  soddisfi le equazioni di  $W$  si trova  $a_2 = 0$  e  $a_1 = a_3$ , da cui si deduce che  $\dim(U \cap W) = 1$ . Per trovare una base di  $U \cap W$  possiamo porre  $a_1 = a_3 = 1$ , ottenendo così il vettore  $v = u_1 + u_3 = (1, 1, 1, 0)$ . Dalla formula di Grassmann si ottiene  $\dim(U + W) = 4$ , quindi  $U + W = \mathbb{R}^4$  e pertanto come base di  $U + W$  possiamo prendere la base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .

(d) Se vogliamo che sia  $U' \oplus W = \mathbb{R}^4$  deve essere  $\dim U' = 2$ . Dobbiamo quindi scegliere un sottospazio  $U'$  di dimensione 2 tale che  $U' \cap W = \{0\}$ . Ad esempio, si può verificare che un sottospazio  $U'$  che va bene è quello generato da  $u_1$  e  $u_2$  (ce ne sono infiniti altri).

**Esercizio 2.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4a^2 & -1 \\ -1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare il rango di  $A$  al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ .

- (b) Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema  $AX = 0$  al variare di  $a$ .
- (c) Poniamo  $a = 1$  e consideriamo il vettore colonna  $B = (b_1, b_2, b_3)$ . Che relazione deve esistere tra le variabili  $b_1, b_2, b_3$  se vogliamo che il sistema  $AX = B$  abbia soluzioni?
- (d) Poniamo  $a = -1$  e consideriamo il vettore colonna  $C = (2, 7, c)$ . Trovare il valore di  $c$  per cui il sistema  $AX = C$  ha soluzioni e, per tale valore di  $c$ , trovare tutte le soluzioni di tale sistema.

**Soluzione.** (a) Riducendo  $A$  in forma a scala si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4a^2 - 4 & -3 \\ 0 & 0 & a + 1 \end{pmatrix}$$

Se  $a = \pm 1$  il rango è 2, se  $a \neq \pm 1$  il rango è 3.

(b) Nel sistema  $AX = 0$  ci sono 3 incognite e il numero di equazioni indipendenti è dato dal rango di  $A$ . Quindi se  $a \neq \pm 1$  il sistema ha solo la soluzione nulla e pertanto la dimensione dello spazio delle soluzioni è 0. Se  $a = \pm 1$  il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da un parametro, quindi la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1.

(c) Poniamo  $a = 1$  e consideriamo la matrice completa del sistema  $AX = B$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 2 & 4 & -1 & b_2 \\ -1 & -2 & 1 & b_3 \end{array} \right)$$

Riducendo questa matrice in forma a scala si ottiene

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & -3 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}b_1 + \frac{2}{3}b_2 + b_3 \end{array} \right)$$

Quindi il sistema  $AX = B$  ha soluzioni se e solo se  $-\frac{1}{3}b_1 + \frac{2}{3}b_2 + b_3 = 0$ , cioè  $-b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 0$ .

(d) Poniamo  $a = -1$  e consideriamo la matrice completa del sistema  $AX = C$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & c \end{array} \right)$$

Riducendo questa matrice in forma a scala si ottiene

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & c + 2 \end{array} \right)$$

Quindi il sistema  $AX = C$  ha soluzioni se e solo se  $c + 2 = 0$ , cioè  $c = -2$ . Risolvendo il sistema partendo dalla seconda equazione di trova  $x_3 = -1$  e poi, dalla prima equazione,  $x_1 = 3 - 2x_2$ , per ogni  $x_2 \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -x_1 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 \end{pmatrix}$$

- (a) Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .
- (b) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di  $f$ .  $f$  è iniettiva?  $f$  è suriettiva?
- (c) Per quale valore di  $\alpha$  il vettore  $w = (1, 3, -1, \alpha)$  appartiene all'immagine di  $f$ ?
- (d) Per il valore di  $\alpha$  trovato al punto (c) determinare  $f^{-1}(w)$ .

**Soluzione.** (a) La matrice di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$  è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Riducendo questa matrice in forma a scala si trova che il rango è 3, quindi l'immagine di  $f$  ha dimensione 3 e una base è formata dalle prime 3 colonne di  $A$ . Di conseguenza il nucleo di  $f$  ha dimensione 1. Risolvendo il sistema  $AX = 0$  si trova che una base del nucleo è formata dal vettore  $(1, 0, -1, 2)$ . Da ciò segue che  $f$  non è iniettiva e non è suriettiva.

(c) Il vettore  $w = (1, 3, -1, \alpha)$  appartiene all'immagine di  $f$  se è combinazione lineare dei vettori della base dell'immagine di  $f$  trovati al punto (b), cioè delle prime tre colonne di  $A$ . In questo modo si trova  $\alpha = 1$ .

(d) I vettori di  $f^{-1}(w)$  sono le soluzioni del sistema  $AX = w$ . Ponendo  $\alpha = 1$  e risolvendo il sistema si trova

$$f^{-1}(w) = (2, 1, 0, 1) + \text{Ker}(f).$$