

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 16 giugno 2026

Esercizio 1. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $w_1 = (0, 2, -1, 1)$, $w_2 = (1, 1, 0, -2)$, $w_3 = (-3, 1, -2, 8)$, $w_4 = (2, 0, 1, -5)$.

- Trovare le relazioni di dipendenza lineare tra i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 e determinare una base di W .
- Scrivere le equazioni cartesiane di W .
- Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Definiamo la funzione lineare $f: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ ponendo $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$, $f(e_3) = w_3$. Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{e_1, e_2, e_3\}$ di U e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Trovare una base di $\text{Ker } f$ e una base di $\text{Im } f$.
- È possibile aggiungere una colonna alla matrice A in modo che il nucleo della matrice così ottenuta sia $\{0\}$? Perché?

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 + 2x_3, hx_2, -x_1 + (3-h)x_2 + 3x_3),$$

ove h è un parametro reale.

- Scrivere la matrice A di f nella base canonica e trovare il polinomio caratteristico di f .
- Determinare gli autovalori di f in funzione di $h \in \mathbb{R}$ e stabilire per quali valori di h la matrice A è diagonalizzabile.
- Ora poniamo $h = 2$. Per questo valore di h trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.
- Sia $M(t)$ una matrice quadrata dipendente da un parametro t . Supponiamo che gli autovalori di $M(t)$ dipendano da t ma gli autovettori **non** dipendano da t . Se sappiamo che per $t = 0$ la matrice è diagonalizzabile possiamo concludere che $M(t)$ è diagonalizzabile per ogni valore di t ? Perché?

Esercizio 3. Sia $V = M(2, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 . In V possiamo definire il prodotto scalare di due matrici usando una delle due formule seguenti, (1) o (2):

$$(1) A \cdot B = \text{Tr}(AB), \quad (2) A \cdot B = \text{Tr}(AB^T).$$

(ricordiamo che **Tr** indica la traccia di una matrice, cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale)

- Identificando le matrici 2×2 con i vettori di $\mathbb{R}^4$, quale delle due formule (1) o (2) corrisponde al prodotto scalare usuale in $\mathbb{R}^4$? (nel seguito dell'esercizio si usi la formula (1) o (2) appena trovata)
- Sia U il sottospazio vettoriale di V generato dalle matrici $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Trovare una base ortogonale di U .
- Trovare la proiezione ortogonale della matrice u_2 sul sottospazio generato da u_1 .

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino le rette $r: \begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} 2x + \alpha z = 4\alpha \\ 2y + z = 2 - 2\alpha \end{cases}$

- Determinare per quali valori di α le rette sono incidenti, parallele oppure sghembe.
- Ora poniamo $\alpha = 0$ fino alla fine dell'esercizio. Scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene la retta r ed è parallelo a s .
- Calcolare la distanza della retta s dal piano π .

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 16 giugno 2026

Esercizio 1. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $w_1 = (2, 1, 0, -2)$, $w_2 = (1, -2, 1, 0)$, $w_3 = (5, 0, 1, -4)$, $w_4 = (4, 7, -2, -6)$.

- Trovare le relazioni di dipendenza lineare tra i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 e determinare una base di W .
- Scrivere le equazioni cartesiane di W .
- Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Definiamo la funzione lineare $f: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ ponendo $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$, $f(e_3) = w_3$. Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{e_1, e_2, e_3\}$ di U e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Trovare una base di $\text{Ker } f$ e una base di $\text{Im } f$.
- È possibile aggiungere una colonna alla matrice A in modo che il nucleo della matrice così ottenuta sia $\{0\}$? Perché?

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (6x_1 + 2x_2 + 2x_3, -hx_2, -4x_1 + hx_2),$$

ove h è un parametro reale.

- Scrivere la matrice A di f nella base canonica e trovare il polinomio caratteristico di f .
- Determinare gli autovalori di f in funzione di $h \in \mathbb{R}$ e stabilire per quali valori di h la matrice A è diagonalizzabile.
- Ora poniamo $h = -4$. Per questo valore di h trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.
- Sia $M(t)$ una matrice quadrata dipendente da un parametro t . Supponiamo che gli autovalori di $M(t)$ dipendano da t ma gli autovettori **non** dipendano da t . Se sappiamo che per $t = 0$ la matrice è diagonalizzabile possiamo concludere che $M(t)$ è diagonalizzabile per ogni valore di t ? Perché?

Esercizio 3. Sia $V = M(2, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 . In V possiamo definire il prodotto scalare di due matrici usando una delle due formule seguenti, (1) o (2):

$$(1) A \cdot B = \text{Tr}(AB), \quad (2) A \cdot B = \text{Tr}(AB^T).$$

(ricordiamo che **Tr** indica la traccia di una matrice, cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale)

- Identificando le matrici 2×2 con i vettori di $\mathbb{R}^4$, quale delle due formule (1) o (2) corrisponde al prodotto scalare usuale in $\mathbb{R}^4$? (nel seguito dell'esercizio si usi la formula (1) o (2) appena trovata)
- Sia U il sottospazio vettoriale di V generato dalle matrici $u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Trovare una base ortogonale di U .
- Trovare la proiezione ortogonale della matrice u_2 sul sottospazio generato da u_1 .

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino le rette $r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - z = 4 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x - 2z = 6 + \alpha \\ y - \alpha z = 4\alpha - 1 \end{cases}$

- Determinare per quali valori di α le rette sono incidenti, parallele oppure sghembe.
- Ora poniamo $\alpha = 0$ fino alla fine dell'esercizio. Scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene la retta r ed è parallelo a s .
- Calcolare la distanza della retta s dal piano π .

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 16 giugno 2026

Esercizio 1. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $w_1 = (0, 1, -2, 2)$, $w_2 = (1, -3, 2, 0)$, $w_3 = (1, 0, -4, 6)$, $w_4 = (3, -7, 2, 4)$.

- Trovare le relazioni di dipendenza lineare tra i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 e determinare una base di W .
- Scrivere le equazioni cartesiane di W .
- Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Definiamo la funzione lineare $f: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ ponendo $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$, $f(e_3) = w_3$. Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{e_1, e_2, e_3\}$ di U e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Trovare una base di $\text{Ker } f$ e una base di $\text{Im } f$.
- È possibile aggiungere una colonna alla matrice A in modo che il nucleo della matrice così ottenuta sia $\{0\}$? Perché?

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 + 2x_2 + 2x_3, hx_2, -x_1 - hx_2),$$

ove h è un parametro reale.

- Scrivere la matrice A di f nella base canonica e trovare il polinomio caratteristico di f .
- Determinare gli autovalori di f in funzione di $h \in \mathbb{R}$ e stabilire per quali valori di h la matrice A è diagonalizzabile.
- Ora poniamo $h = -2$. Per questo valore di h trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.
- Sia $M(t)$ una matrice quadrata dipendente da un parametro t . Supponiamo che gli autovalori di $M(t)$ dipendano da t ma gli autovettori **non** dipendano da t . Se sappiamo che per $t = 0$ la matrice è diagonalizzabile possiamo concludere che $M(t)$ è diagonalizzabile per ogni valore di t ? Perché?

Esercizio 3. Sia $V = M(2, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 . In V possiamo definire il prodotto scalare di due matrici usando una delle due formule seguenti, (1) o (2):

$$(1) A \cdot B = \text{Tr}(AB), \quad (2) A \cdot B = \text{Tr}(AB^T).$$

(ricordiamo che **Tr** indica la traccia di una matrice, cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale)

- Identificando le matrici 2×2 con i vettori di $\mathbb{R}^4$, quale delle due formule (1) o (2) corrisponde al prodotto scalare usuale in $\mathbb{R}^4$? (nel seguito dell'esercizio si usi la formula (1) o (2) appena trovata)
- Sia U il sottospazio vettoriale di V generato dalle matrici $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare una base ortogonale di U .
- Trovare la proiezione ortogonale della matrice u_2 sul sottospazio generato da u_1 .

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino le rette $r: \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - 3z = 4 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} \alpha x + 2y = 4\alpha \\ x + 2z = 2 - 2\alpha \end{cases}$

- Determinare per quali valori di α le rette sono incidenti, parallele oppure sghembe.
- Ora poniamo $\alpha = 0$ fino alla fine dell'esercizio. Scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene la retta r ed è parallelo a s .
- Calcolare la distanza della retta s dal piano π .

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 16 giugno 2026

Esercizio 1. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $w_1 = (1, 2, 0, -1)$, $w_2 = (-1, 0, 3, 2)$, $w_3 = (1, 4, 3, 0)$, $w_4 = (1, 6, 6, 1)$.

- Trovare le relazioni di dipendenza lineare tra i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 e determinare una base di W .
- Scrivere le equazioni cartesiane di W .
- Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Definiamo la funzione lineare $f: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ ponendo $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$, $f(e_3) = w_3$. Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{e_1, e_2, e_3\}$ di U e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Trovare una base di $\text{Ker } f$ e una base di $\text{Im } f$.
- È possibile aggiungere una colonna alla matrice A in modo che il nucleo della matrice così ottenuta sia $\{0\}$? Perché?

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 + 2x_3, -hx_2, -4x_1 + (h-6)x_2 - 6x_3),$$

ove h è un parametro reale.

- Scrivere la matrice A di f nella base canonica e trovare il polinomio caratteristico di f .
- Determinare gli autovalori di f in funzione di $h \in \mathbb{R}$ e stabilire per quali valori di h la matrice A è diagonalizzabile.
- Ora poniamo $h = 4$. Per questo valore di h trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.
- Sia $M(t)$ una matrice quadrata dipendente da un parametro t . Supponiamo che gli autovalori di $M(t)$ dipendano da t ma gli autovettori **non** dipendano da t . Se sappiamo che per $t = 0$ la matrice è diagonalizzabile possiamo concludere che $M(t)$ è diagonalizzabile per ogni valore di t ? Perché?

Esercizio 3. Sia $V = M(2, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 . In V possiamo definire il prodotto scalare di due matrici usando una delle due formule seguenti, (1) o (2):

$$(1) A \cdot B = \text{Tr}(AB), \quad (2) A \cdot B = \text{Tr}(AB^T).$$

(ricordiamo che **Tr** indica la traccia di una matrice, cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale)

- Identificando le matrici 2×2 con i vettori di $\mathbb{R}^4$, quale delle due formule (1) o (2) corrisponde al prodotto scalare usuale in $\mathbb{R}^4$? (nel seguito dell'esercizio si usi la formula (1) o (2) appena trovata)
- Sia U il sottospazio vettoriale di V generato dalle matrici $u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Trovare una base ortogonale di U .
- Trovare la proiezione ortogonale della matrice u_2 sul sottospazio generato da u_1 .

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino le rette $r: \begin{cases} x - z = -4 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} 2x - y = -6 - \alpha \\ \alpha x - z = 1 - 4\alpha \end{cases}$

- Determinare per quali valori di α le rette sono incidenti, parallele oppure sghembe.
- Ora poniamo $\alpha = 0$ fino alla fine dell'esercizio. Scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene la retta r ed è parallelo a s .
- Calcolare la distanza della retta s dal piano π .