

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 16 giugno 2026

Esercizio 1. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $w_1 = (0, 2, -1, 1)$, $w_2 = (1, 1, 0, -2)$, $w_3 = (-3, 1, -2, 8)$, $w_4 = (2, 0, 1, -5)$.

- Trovare le relazioni di dipendenza lineare tra i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 e determinare una base di W .
- Scrivere le equazioni cartesiane di W .
- Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Definiamo la funzione lineare $f: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ ponendo $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$, $f(e_3) = w_3$. Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{e_1, e_2, e_3\}$ di U e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Trovare una base di $\text{Ker } f$ e una base di $\text{Im } f$.
- È possibile aggiungere una colonna alla matrice A in modo che il nucleo della matrice così ottenuta sia $\{0\}$? Perché?

Soluzione. (a) Ci sono due relazioni di dipendenza lineare, date da

$$\begin{cases} -2w_1 + 3w_2 + w_3 = 0 \\ w_1 - 2w_2 + w_4 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} w_3 = 2w_1 - 3w_2 \\ w_4 = -w_1 + 2w_2 \end{cases}$$

Da ciò si deduce che una base di W è formata dai vettori w_1 e w_2 .

(b) Un generico vettore (x_1, x_2, x_3, x_4) di W è combinazione lineare di w_1 e w_2 :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = a w_1 + b w_2$$

Eliminando i parametri a e b si ottengono le seguenti equazioni cartesiane di W :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(c) Dalla definizione di f si ha $f(e_1) = (0, 2, -1, 1)$, $f(e_2) = (1, 1, 0, -2)$, $f(e_3) = (-3, 1, -2, 8)$, quindi la matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Sappiamo già che A ha rango 2 e che le prime due colonne (cioè i vettori w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti, quindi una base di $\text{Im } f$ è costituita dai vettori w_1 e w_2 . Dato che $\dim U = 3$, il nucleo di f deve avere dimensione 1. Una base di $\text{Ker } f$ è formata da un vettore $u \in U$ (cioè un vettore del tipo $u = (x_1, x_2, x_3, 0)$) tale che $f(u) = 0$. Risolvendo il sistema di equazioni si trova $u = (-2, 3, 1, 0)$.

(d) No, non è possibile. La terza colonna di A (il vettore w_3) è combinazione lineare delle prime due colonne (cioè dei vettori w_1 e w_2), quindi aggiungendo una quarta colonna si può ottenere una matrice che abbia al più rango 3. Ma in tal caso il nucleo avrebbe dimensione 1 e non 0.

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 + 2x_3, hx_2, -x_1 + (3-h)x_2 + 3x_3),$$

ove h è un parametro reale.

- Scrivere la matrice A di f nella base canonica e trovare il polinomio caratteristico di f .
- Determinare gli autovalori di f in funzione di $h \in \mathbb{R}$ e stabilire per quali valori di h la matrice A è diagonalizzabile.

- (c) Ora poniamo $h = 2$. Per questo valore di h trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.
- (d) Sia $M(t)$ una matrice quadrata dipendente da un parametro t . Supponiamo che gli autovalori di $M(t)$ dipendano da t ma gli autovettori **non** dipendano da t . Se sappiamo che per $t = 0$ la matrice è diagonalizzabile possiamo concludere che $M(t)$ è diagonalizzabile per ogni valore di t ? Perché?

Soluzione. (a) La matrice di f è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & h & 0 \\ -1 & 3-h & 3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è

$$\det \begin{pmatrix} 0-x & 2 & 2 \\ 0 & h-x & 0 \\ -1 & 3-h & 3-x \end{pmatrix}$$

Sviluppando i calcoli si trova il polinomio $(h-x)(x-1)(x-2)$.

(b) Dal polinomio caratteristico si deduce che gli autovalori sono h , 1 e 2. Se $h \neq 1, 2$ ci sono tre autovalori distinti, quindi A è diagonalizzabile. Se $h = 1$ l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2. Calcolando il suo autospazio si trova che anche l'autospazio ha dimensione 2, quindi la molteplicità geometrica è uguale alla molteplicità algebrica: questo significa che per $h = 1$ A è diagonalizzabile. Se $h = 2$ l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 2. Calcolando il suo autospazio si trova che anche l'autospazio ha dimensione 2, quindi la molteplicità geometrica è uguale alla molteplicità algebrica: questo significa che anche per $h = 2$ A è diagonalizzabile. Concludiamo pertanto che A è diagonalizzabile per ogni valore di h .

(c) Ponendo $h = 2$ la matrice diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sappiamo già che gli autovalori sono 1 (con molteplicità 1) e 2 (con molteplicità 2). Un autovettore per l'autovalore 1 è $v_1 = (2, 0, 1)$. Cercando gli autovettori per l'autovalore 2 si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

che equivale alla sola equazione $x_1 = x_2 + x_3$. Due autovettori linearmente indipendenti sono quindi $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, 1)$. I vettori v_1, v_2, v_3 formano una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Sia $M(t)$ una matrice $n \times n$. Dire che per $t = 0$ tale matrice è diagonalizzabile significa che per $t = 0$ gli autovettori formano una base di $\mathbb{R}^n$. Siccome gli autovettori non dipendono dal valore di t , se essi sono una base di $\mathbb{R}^n$ per $t = 0$ allora sono una base di $\mathbb{R}^n$ per ogni valore di t . Questo significa che $M(t)$ è diagonalizzabile per ogni valore di t .

Esercizio 3. Sia $V = M(2, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 . In V possiamo definire il prodotto scalare di due matrici usando una delle due formule seguenti, (1) o (2):

$$(1) A \cdot B = \text{Tr}(AB), \quad (2) A \cdot B = \text{Tr}(AB^T).$$

(ricordiamo che **Tr** indica la traccia di una matrice, cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale)

- (a) Identificando le matrici 2×2 con i vettori di $\mathbb{R}^4$, quale delle due formule (1) o (2) corrisponde al prodotto scalare usuale in $\mathbb{R}^4$? (nel seguito dell'esercizio si usi la formula (1) o (2) appena trovata)
- (b) Sia U il sottospazio vettoriale di V generato dalle matrici $u_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Trovare una base ortogonale di U .
- (c) Trovare la proiezione ortogonale della matrice u_2 sul sottospazio generato da u_1 .

Soluzione. (a) Identifichiamo una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con il vettore $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Siano $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Si ha:

$$\text{Tr}(AB) = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_4, \quad \text{Tr}(AB^T) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4.$$

Quindi la formula che corrisponde al prodotto scalare usuale in $\mathbb{R}^4$ è la (2), $A \cdot B = \text{Tr}(AB^T)$.

(b) Possiamo identificare le matrici u_1 e u_2 con i vettori $u_1 = (2, 1, -1, 0)$ e $u_2 = (1, 3, 0, -2)$. Questi due vettori sono una base di U . Per trovare una base ortogonale applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt.

Poniamo $u'_1 = u_1$ e $u'_2 = u_2 + \alpha u'_1$. Richiedendo che sia $u'_1 \cdot u'_2 = 0$ si trova $\alpha = -\frac{5}{6}$, quindi $u'_2 = u_2 - \frac{5}{6} u_1$. I vettori u'_1 e u'_2 (scritti nuovamente nella forma di matrici 2×2) sono una base ortogonale di U .

(c) Come fatto nel punto (b) possiamo identificare le matrici u_1 e u_2 con i vettori $u_1 = (2, 1, -1, 0)$ e $u_2 = (1, 3, 0, -2)$. Indichiamo con $w = \lambda u_1$ la proiezione ortogonale del vettore u_2 sul sottospazio generato da u_1 . Ciò significa che il vettore $u_2 - w$ deve essere ortogonale a u_1 , quindi $u_1 \cdot (u_2 - \lambda u_1) = 0$. Sviluppando i calcoli si trova $\lambda = \frac{u_1 \cdot u_2}{u_1 \cdot u_1} = \frac{5}{6}$. Quindi $w = \frac{5}{6} u_1 = (\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, 0)$.

Osservazione: si noti che non serviva fare questi calcoli perché sono gli stessi calcoli fatti nel punto (b), nel procedimento di Gram-Schmidt.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino le rette $r : \begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 2x + \alpha z = 4\alpha \\ 2y + z = 2 - 2\alpha \end{cases}$

- Determinare per quali valori di α le rette sono incidenti, parallele oppure sghembe.
- Ora poniamo $\alpha = 0$ fino alla fine dell'esercizio. Scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene la retta r ed è parallelo a s .
- Calcolare la distanza della retta s dal piano π .

Soluzione. (a) Mettendo a sistema le equazioni delle due rette si scopre che il sistema ha soluzione se e solo se $\alpha = 1$. Questo significa che per $\alpha = 1$ le due rette sono incidenti.

Due punti di r sono $R_1 = (4, 0, 0)$ e $R_2 = (7, 1, -2)$ da cui si ricava un vettore direttore della retta r : $v_r = R_2 - R_1 = (3, 1, -2)$.

Due punti di s sono $S_1 = (2\alpha, 1 - \alpha, 0)$ e $S_2 = (\alpha, -\alpha, 2)$ da cui si ricava un vettore direttore della retta s : $v_s = S_1 - S_2 = (\alpha, 1, -2)$. I vettori v_r e v_s sono proporzionali se e solo se $\alpha = 3$, quindi per $\alpha = 3$ le due rette sono parallele. Di conseguenza, per $\alpha \neq 1, 3$ le due rette sono sghembe.

(b) Poniamo $\alpha = 0$, quindi r e s sono sghembe e si ha $v_s = (0, 1, -2)$. Le equazioni parametriche del piano π che contiene la retta r ed è parallelo a s sono date da $X = R_1 + a v_r + b v_s$, cioè

$$\pi : \begin{cases} x = 4 + 3a \\ y = a + b \\ z = -2a - 2b \end{cases}$$

Dato che $z = -2(a + b) = -2y$, eliminando i parametri a e b si ottiene la seguente equazione cartesiana del piano $\pi : 2y + z = 0$.

(c) Dato che la retta s è parallela al piano π , la distanza di s da π è uguale alla distanza di uno qualunque dei punti di s (ad esempio $S_1 = (0, 1, 0)$) da π . Usando la formula per la distanza di un punto da un piano si trova

$$\text{dist}(s, \pi) = \text{dist}(S_1, \pi) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5} \sqrt{5}.$$