

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2° appello — 7 luglio 2026

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, 0, t, -2)$, $u_2 = (-2, 1, 0, 1)$, $u_3 = (-1, 2, 2t + 1, -4)$.

- Determinare la dimensione di U al variare di $t \in \mathbb{R}$ e, per il valore di t per cui $\dim U = 2$, scrivere le equazioni cartesiane di U .
- Ora poniamo $t = 0$ fino alla fine dell'esercizio. Definiamo una funzione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ponendo $f(u_1) = u_2$, $f(u_2) = u_3$, $f(0, 0, 1, 0) = (9, -7, -2, 3)$, $f(0, 0, 0, 1) = (1, 0, 0, -2)$. Scrivere la matrice di f nella base canonica di $\mathbb{R}^4$.
- Trovare delle basi di $\text{Ker } f$ e di $\text{Im } f$.
- Esiste una funzione lineare $g: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $f(g(u)) = u$ per ogni $u \in U$? Se tale funzione g esiste essa è unica?

Soluzione. (a) Si verifica che per $t = 1$ il vettore u_3 è combinazione lineare di u_1 e u_2 . Quindi, per $t = 1$ si ha $\dim U = 2$ e una base è $\{u_1, u_2\}$, mentre per $t \neq 1$ si ha $\dim U = 3$ e una base è $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Poniamo quindi $t = 1$. Un generico vettore (x_1, x_2, x_3, x_4) di U si scrive come

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha u_1 + \beta u_2.$$

Da queste equazioni, eliminando i parametri α e β , si ottengono le seguenti equazioni cartesiane di U :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

(b) Poniamo $t = 0$, quindi u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti. Per scrivere la matrice di f nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ dobbiamo solo calcolare $f(e_1)$ e $f(e_2)$, dato che il testo del problema ci fornisce $f(e_3)$ e $f(e_4)$.

Osserviamo che $e_1 = u_1 + 2e_4$, quindi $f(e_1) = f(u_1) + 2f(e_4) = (-2, 1, 0, 1) + 2(1, 0, 0, -2) = (0, 1, 0, -3)$.

Osserviamo che $e_2 = u_2 + 2e_1 - e_4$, quindi $f(e_2) = f(u_2) + 2f(e_1) - f(e_4) = (-2, 4, 1, -8)$. Quindi la matrice di f è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 9 & 1 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Il nucleo di f è dato dalle soluzioni del sistema $AX = 0$. Risolvendo il sistema si trova che $\dim \text{Ker } f = 1$ e una base è formata dal vettore $(-1, 2, 1, -5)$. Da ciò si deduce che $\dim \text{Im } f = 3$ e una base è formata da tre colonne di A (ad esempio, dalle prime tre colonne).

(d) Abbiamo già visto che $\dim \text{Im } f = 3$ e si verifica che $\text{Im } f = U$. Quindi per ogni vettore $u \in U$ esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $f(v) = u$. Si osservi che tale vettore v non è unico perché $\text{Ker } f \neq \{0\}$. Da ciò si deduce che esiste $g: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $f(g(u)) = u$ per ogni $u \in U$, ma tale g non è unica.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di M .

- (b) Dire per quali valori di a la matrice M è diagonalizzabile e per quali valori di a non è diagonalizzabile.
- (c) Ora poniamo $a = 0$ e sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di M . Applicando il procedimento di Gram–Schmidt a questi vettori è possibile ottenere una base **ortogonale** di $\mathbb{R}^3$ formata da **autovettori** di M ?

Soluzione. (a) Il polinomio caratteristico è $(x - a)(x^2 - 4x + 3)$, quindi gli autovalori sono $a, 1, 3$.

(b) Se $a \neq 1, 3$ ci sono tre autovalori distinti, quindi M è diagonalizzabile. Rimangono quindi da analizzare i due casi $a = 1, a = 3$.

Se $a = 1$ l'autovalore 1 ha molteplicità 2. In questo caso si trova che la matrice $A - 1$ ha rango 1, quindi l'autospazio per l'autovalore 1 ha dimensione 2. Questo significa che per $a = 1$ M è diagonalizzabile.

Se $a = 3$ l'autovalore 3 ha molteplicità 2. In questo caso si trova che la matrice $A - 3$ ha rango 2, quindi l'autospazio per l'autovalore 3 ha dimensione 1. Questo significa che per $a = 3$ M non è diagonalizzabile.

(c) Ricordiamo che una base ortogonale formata da autovettori di una matrice A esiste se e solo se A è simmetrica. Siccome M non è simmetrica, non è possibile ottenere una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di M .

Questo significa che se applichiamo il procedimento di Gram–Schmidt a una base di autovettori di M sicuramente otteniamo una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$, ma i vettori della base ortogonale così ottenuta non saranno autovettori di M .

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale sia U il sottospazio generato da $u_1 = (1, 2, 0, -1)$, $u_2 = (0, 1, -1, 2)$, $u_3 = (1, 1, 1, -1)$.

- (a) Usando il procedimento di Gram–Schmidt trovare una base ortogonale di U .
- (b) Trovare una base di $U^\perp$.
- (c) Trovare la proiezione ortogonale di $v = (3, 1, -1, -3)$ su U .
- (d) Sia L il sottospazio generato dal vettore $\ell = (3, 1, 5, 1)$. Verificare che $L \subset U$ e trovare la dimensione e una base del sottospazio $W = \{u \in U \mid u \in L^\perp\}$.

Soluzione. (a) I vettori u_1 e u_2 sono ortogonali, quindi poniamo $u'_1 = u_1$ e $u'_2 = u_2$. Poi poniamo $u'_3 = u_3 + \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2$. Richiedendo che u'_3 sia ortogonale a u'_1 e a u'_2 si trovano i valori di α_1 e α_2 . Sostituendo i valori trovati si ottiene $u'_3 = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Una base ortogonale di U è formata dai vettori u'_1, u'_2, u'_3 .

(b) Sia $w = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un generico vettore di $U^\perp$. Si deve quindi avere $w \cdot u_1 = 0$, $w \cdot u_2 = 0$, $w \cdot u_3 = 0$. Risolvendo queste equazioni si trova che una base di $U^\perp$ è formata dal vettore $(2, -1, -1, 0)$.

(c) Scriviamo $v = u + w$, con $u \in U$ e $w \in U^\perp$. Deve quindi essere $w = \alpha(2, -1, -1, 0) = (2\alpha, -\alpha, -\alpha, 0)$. Di conseguenza $u = v - w = (3 - 2\alpha, 1 + \alpha, -1 + \alpha, -3)$. Questo vettore u deve essere ortogonale al vettore $(2, -1, -1, 0)$. In questo modo si trova $\alpha = 1$ e quindi $u = (1, 2, 0, -3)$. Questo vettore è la proiezione ortogonale di $v = (3, 1, -1, -3)$ su U .

(d) Per verificare che $L \subset U$ basta verificare che il vettore $\ell = (3, 1, 5, 1)$ è ortogonale al vettore $(2, -1, -1, 0)$, il che è vero.

Sia $w = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un generico vettore di W . Deve essere $w \in U$, cioè $w \cdot (2, -1, -1, 0) = 0$, da cui si ottiene l'equazione $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Inoltre deve essere $w \in L^\perp$, cioè $w \cdot \ell = 0$, da cui si ottiene l'equazione $3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0$. Risolvendo il sistema formato da queste

due equazioni si trova che $\dim W = 2$ e una base è formata dai vettori $w_1 = (1, 0, 2, -13)$ e $w_2 = (0, 1, -1, 4)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ consideriamo i piani π_α di equazione

$$(2\alpha + 1)x - y + \alpha z = 0.$$

(a) Mostrare che esiste una retta r contenuta in tutti i piani π_α , per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, e scrivere le equazioni cartesiane di tale retta.

(b) Sia s la retta di equazioni
$$\begin{cases} x - 3z + 8 = 0 \\ y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Determinare per quale valore di α il piano π_α è ortogonale alla retta s e per quale valore di α la retta s è parallela a π_α .

(c) Trovare il punto $S \in s$ di minima distanza da $P = (6, 3, 2)$.

Soluzione. (a) Osserviamo che l'equazione di π_α si può riscrivere come segue:

$$\alpha(2x + z) + (x - y) = 0.$$

Da ciò si deduce che la retta r di equazioni

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

è contenuta in tutti i piani π_α .

(b) Due punti della retta s sono $S_1 = (-8, 3, 0)$ e $S_2 = (-5, 2, 1)$, quindi il vettore $v_s = S_2 - S_1 = (3, -1, 1)$ è parallelo a s . Un vettore ortogonale a π_α è $n = (2\alpha + 1, -1, \alpha)$.

I vettori n e v_s sono paralleli se e solo se $\alpha = 1$, quindi in questo caso il piano π_α è ortogonale alla retta s .

I vettori n e v_s sono ortogonali se e solo se $n \cdot v_s = 0$, il che avviene per $\alpha = -\frac{4}{7}$, quindi in questo caso il piano π_α è parallelo alla retta s .

(c) Un punto generico della retta s è $S = (-8 + 3t, 3 - t, t)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$. Calcoliamo il vettore $\vec{PS} = (-14 + 3t, -t, -2 + t)$ e imponiamo che sia $\vec{PS} \cdot v_s = 0$. Da questa equazione si ricava $t = 4$, per cui il punto $S \in s$ di minima distanza da P è $S = (4, -1, 4)$.