

Esercizio 1. Consideriamo le seguenti funzioni lineari da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$:

$$f_1(x_1, \dots) = 2x_1 - x_3, \quad f_2(x_1, \dots) = x_1 - x_2 - x_3, \quad f_3(x_1, \dots) = x_1 + 3x_2 + x_3.$$

- Scrivere le matrici A_1, A_2, A_3 di f_1, f_2, f_3 nelle basi canoniche. Determinare una base del sottospazio $V \subset \mathbb{R}^3$ generato dalle matrici A_1, A_2, A_3 .
- Determinare la matrice $M \in V$ di una funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(1, 0, 0) = 4$ e $f(0, 0, 1) = -3$.
- Determinare l'intersezione dei nuclei di tutte le matrici $A \in V$.
- Sia W l'insieme delle matrici delle funzioni $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(1, 1, 1) = 0$. Determinare una base di W e una base di $V \cap W$.

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da $f(x, y, z) = (2y - 3z, x - y + z, x + y - 2z)$.

- Stabilire se f è suriettiva e dire per quale valore di t il vettore $(3, t, 1)$ appartiene all'immagine di f . Trovare una base del nucleo di f .
- Calcolare gli autovalori di f .
- Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia V il sottospazio di equazione $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ e sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (0, 1, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, -2, 0)$.

- Determinare una base di $V^\perp$ e una base ortogonale di U .
- Determinare una base di un sottospazio $W \subset U^\perp$ tale che $V = U \oplus W$.
- Dato il vettore $v_t = (4, t, -5, 3)$, si determini per quale valore di t è possibile scrivere $v_t = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Si trovino inoltre esplicitamente tali vettori u e w .

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono assegnati il piano $\pi: x - y - z - 1 = 0$ e la retta

$$r: \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

- Determinare l'equazione cartesiana del piano σ che contiene la retta r e forma un angolo retto con il piano π .
- Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto A , contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r .
- Scrivere le equazioni parametriche della retta t passante per il punto $B = (0, 1, 1)$, parallela al piano π e incidente la retta r .
- Trovare i punti di minima distanza delle rette s e t .

Esercizio 1. Consideriamo le seguenti funzioni lineari da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$:

$$f_1(x_1, \dots) = 2x_1 - 2x_2 + x_3, \quad f_2(x_1, \dots) = 2x_1 - x_2 + 2x_3, \quad f_3(x_1, \dots) = 2x_1 - 4x_2 - x_3.$$

- (a) Scrivere le matrici A_1, A_2, A_3 di f_1, f_2, f_3 nelle basi canoniche. Determinare una base del sottospazio $V \subset \mathbb{R}^3$ generato dalle matrici A_1, A_2, A_3 .
- (b) Determinare la matrice $M \in V$ di una funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(0, 1, 0) = -5$ e $f(0, 0, 1) = 7$.
- (c) Determinare l'intersezione dei nuclei di tutte le matrici $A \in V$.
- (d) Sia W l'insieme delle matrici delle funzioni $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(2, 1, -1) = 0$. Determinare una base di W e una base di $V \cap W$.

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da $f(x, y, z) = (x - y + 3z, 2y - z, x + y + 2z)$.

- (a) Stabilire se f è suriettiva e dire per quale valore di t il vettore $(3, t, 7)$ appartiene all'immagine di f . Trovare una base del nucleo di f .
- (b) Calcolare gli autovalori di f .
- (c) Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia V il sottospazio di equazione $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$ e sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -1, 0, 1)$, $u_2 = (0, -2, 1, 1)$.

- (a) Determinare una base di $V^\perp$ e una base ortogonale di U .
- (b) Determinare una base di un sottospazio $W \subset U^\perp$ tale che $V = U \oplus W$.
- (c) Dato il vettore $v_t = (4, 0, t, 5)$, si determini per quale valore di t è possibile scrivere $v_t = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Si trovino inoltre esplicitamente tali vettori u e w .

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono assegnati il piano $\pi: x + y - z = 0$ e la retta

$$r: \begin{cases} 2x - z - 3 = 0 \\ y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano σ che contiene la retta r e forma un angolo retto con il piano π .
- (b) Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto A , contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r .
- (c) Scrivere le equazioni parametriche della retta t passante per il punto $B = (2, 1, 0)$, parallela al piano π e incidente la retta r .
- (d) Trovare i punti di minima distanza delle rette s e t .

Esercizio 1. Consideriamo le seguenti funzioni lineari da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$:

$$f_1(x_1, \dots) = 2x_1 - x_2, \quad f_2(x_1, \dots) = x_1 + 2x_2 - x_3, \quad f_3(x_1, \dots) = 3x_1 - 4x_2 + x_3.$$

- Scrivere le matrici A_1, A_2, A_3 di f_1, f_2, f_3 nelle basi canoniche. Determinare una base del sottospazio $V \subset \mathbb{R}^3$ generato dalle matrici A_1, A_2, A_3 .
- Determinare la matrice $M \in V$ di una funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(1, 0, 0) = 5$ e $f(0, 1, 0) = 0$.
- Determinare l'intersezione dei nuclei di tutte le matrici $A \in V$.
- Sia W l'insieme delle matrici delle funzioni $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(1, 1, -2) = 0$. Determinare una base di W e una base di $V \cap W$.

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da $f(x, y, z) = (2x - y, -x + 3y + z, x + 2y + z)$.

- Stabilire se f è suriettiva e dire per quale valore di t il vettore $(4, 3, t)$ appartiene all'immagine di f . Trovare una base del nucleo di f .
- Calcolare gli autovalori di f .
- Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia V il sottospazio di equazione $2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0$ e sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -1, 1)$, $u_2 = (2, 1, 0, 1)$.

- Determinare una base di $V^\perp$ e una base ortogonale di U .
- Determinare una base di un sottospazio $W \subset U^\perp$ tale che $V = U \oplus W$.
- Dato il vettore $v_t = (5, 4, -3, t)$, si determini per quale valore di t è possibile scrivere $v_t = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Si trovino inoltre esplicitamente tali vettori u e w .

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono assegnati il piano $\pi: x + y - z + 1 = 0$ e la retta

$$r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

- Determinare l'equazione cartesiana del piano σ che contiene la retta r e forma un angolo retto con il piano π .
- Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto A , contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r .
- Scrivere le equazioni parametriche della retta t passante per il punto $B = (1, 1, 0)$, parallela al piano π e incidente la retta r .
- Trovare i punti di minima distanza delle rette s e t .

Esercizio 1. Consideriamo le seguenti funzioni lineari da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$:

$$f_1(x_1, \dots) = 2x_2 + x_3, \quad f_2(x_1, \dots) = x_1 - 2x_2 + x_3, \quad f_3(x_1, \dots) = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3.$$

- Scrivere le matrici A_1, A_2, A_3 di f_1, f_2, f_3 nelle basi canoniche. Determinare una base del sottospazio $V \subset \mathbb{R}^3$ generato dalle matrici A_1, A_2, A_3 .
- Determinare la matrice $M \in V$ di una funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(0, 1, 0) = 4$ e $f(0, 0, 1) = 4$.
- Determinare l'intersezione dei nuclei di tutte le matrici $A \in V$.
- Sia W l'insieme delle matrici delle funzioni $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(2, 1, 2) = 0$. Determinare una base di W e una base di $V \cap W$.

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da $f(x, y, z) = (3x - 2z, -2x + y - z, x + y - 3z)$.

- Stabilire se f è suriettiva e dire per quale valore di t il vettore $(4, t, -1)$ appartiene all'immagine di f . Trovare una base del nucleo di f .
- Calcolare gli autovalori di f .
- Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia V il sottospazio di equazione $x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$ e sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 2, 1, 1)$.

- Determinare una base di $V^\perp$ e una base ortogonale di U .
- Determinare una base di un sottospazio $W \subset U^\perp$ tale che $V = U \oplus W$.
- Dato il vettore $v_t = (0, t, 5, -7)$, si determini per quale valore di t è possibile scrivere $v_t = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Si trovino inoltre esplicitamente tali vettori u e w .

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono assegnati il piano $\pi: x - y + z = 0$ e la retta

$$r: \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

- Determinare l'equazione cartesiana del piano σ che contiene la retta r e forma un angolo retto con il piano π .
- Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto A , contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r .
- Scrivere le equazioni parametriche della retta t passante per il punto $B = (1, 0, 2)$, parallela al piano π e incidente la retta r .
- Trovare i punti di minima distanza delle rette s e t .