Esercizi di Logica Matematica

Francesco Bottacin

1 Logica Proposizionale

Esercizio 1.1. Eliminare le parentesi non necessarie nelle seguenti formule:

1. $((A \wedge B) \to (\neg C))$
2. $(A \to (B \to (\neg C)))$
3. $((A \wedge B) \vee (C \to D))$
4. $(\neg(A \vee ((\neg B) \to C)))$
5. $(A \to (B \vee (C \to D)))$
6. $(\neg((\neg(\neg(\neg A))) \wedge \perp))$
7. $(A \to (B \wedge ((\neg C) \vee D)))$

Esercizio 1.2. Eliminare le parentesi non necessarie nelle seguenti formule:

1. $((B \to ((\neg C) \vee (D \wedge A))) \to (B \to B))$
2. $(((A \wedge (\neg B)) \wedge C) \vee D)$
3. $((A \to (B \vee C)) \vee (\neg(C \to D)))$
4. $((\neg(\neg(\neg(B \vee C)))) \to (B \wedge C))$
5. $((((A \to B) \to (C \to D)) \wedge (\neg A)) \vee C)$
6. $((A \to B) \to (\neg(C \vee D)))$
7. $(A \vee (B \vee C))$

Esercizio 1.3. Inserire le parentesi nelle seguenti formule:

1. $\neg\neg A \to A \to B \vee C$

2. $\neg(\neg A \to A) \to B \vee C$
3. $A \to (\neg A \vee B) \to (A \wedge (B \vee C))$
4. $\neg A \vee B \vee C \wedge D \to A \wedge \neg A$
5. $\neg(A \to B) \vee C \vee D \to B$

Esercizio 1.4. Scrivere la tavola di verità delle seguenti formule:

1. $(A \to B) \wedge A$
2. $(A \vee \neg C) \leftrightarrow B$
3. $(A \to B) \wedge (\neg B \vee A)$
4. $\neg(A \to \neg B) \vee (\neg A \leftrightarrow B)$
5. $(A \wedge B \vee \neg C) \to \neg(B \vee C)$

Esercizio 1.5. Verificare quali delle seguenti formule sono delle tautologie:

1. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
2. $\neg(A \to \neg A)$
3. $A \vee \neg A$
4. $\perp \to A$
5. $\neg A \to (A \to B)$
6. $(A \wedge B) \wedge (\neg B \vee C)$
7. $A \vee B \to A \wedge B$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
9. $(A \to B) \to ((B \to \neg C) \to \neg A)$

Esercizio 1.6. Verificare quali delle seguenti formule sono delle tautologie:

1. $((A \to B) \to B) \to B$
2. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow A))$
3. $A \to (B \to (B \to A))$
4. $(A \wedge B) \to (A \vee C)$

5. $(A \vee (\neg(B \wedge C))) \to ((A \leftrightarrow C) \vee B)$
6. $((B \to C) \to (A \to B)) \to (A \to B)$

Esercizio 1.7. Per ciascuna delle seguenti formule si determini se essa è una tautologia, una contraddizione o nessuna delle due cose:

1. $A \leftrightarrow (A \vee A)$
2. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
3. $((A \to B) \wedge B) \to A$
4. $\neg A \to (A \wedge B)$
5. $A \wedge (\neg(A \vee B))$
6. $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
7. $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

Esercizio 1.8. Si stabilisca se il seguente insieme di formule è soddisfacibile:

$$\{A \vee B, \neg B \vee \neg C, C \vee D, \neg D \vee E\}$$

Esercizio 1.9. Si dimostri che la formula $B \vee C$ è soddisfacibile se e solo se lo è la formula $(B \vee A) \wedge (C \vee \neg A)$.

Esercizio 1.10. Sia $\diamond$ il connettivo definito dalla seguente tavola di verità:

A	B	$A \diamond B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Lo si esprima in funzione dei connettivi $\vee$ e $\neg$.

Esercizio 1.11. Si scriva una formula P, contenente solo i connettivi $\neg$, $\wedge$ e $\vee$, che abbia la seguente tavola di verità:

A	B	C	P
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Esercizio 1.12. Trovare delle forme normali congiuntive e disgiuntive equivalenti alle seguenti formule:

1. $(A \to B) \to (B \to \neg C)$
2. $\neg(A \to (B \to \neg C)) \wedge D$
3. $\neg(A \wedge B \wedge (C \to D))$
4. $\neg(A \leftrightarrow B)$

Esercizio 1.13. Per ciascuna delle seguenti formule si scriva una formula equivalente in forma normale congiuntiva e una in forma normale disgiuntiva:

1. $\neg(A \to B) \vee (\neg A \wedge C)$
2. $A \leftrightarrow ((B \wedge \neg A) \vee C)$
3. $\neg(A \to B) \wedge \neg(C \vee \neg D)$
4. $(A \wedge B) \to \neg(A \to \neg B)$
5. $A \wedge \neg B \vee C \to \neg A \vee B \wedge \neg C$

2 Logica dei Predicati

Esercizio 2.1. Determinare le variabili libere nelle seguenti formule:

1. $\forall x\, \exists y\, A(x, y) \to B(x, y)$
2. $\exists x, \exists y\, (A(x, y) \to B(x, y))$
3. $\neg\forall y\, \exists x\, A(y) \to (B(x, y) \wedge \forall z\, C(x, z))$
4. $\exists x\, \exists y\, (A(x, y) \to B(x)) \to \forall z\, C(z) \vee D(z)$

Esercizio 2.2. Data la formula ben formata

$$Q = \exists x\, \forall y\, P(y, f(x), g(z)),$$

definire un'interpretazione che è un modello per Q ed un'interpretazione che non lo è.

Esercizio 2.3. Si considerino le seguenti formule:

1. $\forall x\, P(x, x)$

2. $\forall x \, \forall y \, (P(x,y) \to P(y,x))$

3. $\forall x \, \forall y \, \forall z \, (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$

Si dimostri che nessuna di tali formule è conseguenza semantica delle altre due. (*Suggerimento:* trovare delle interpretazioni che sono dei modelli per due delle formule date ma non per la terza).

Esercizio 2.4. Si stabilisca quali delle seguenti formule sono valide.

1. $\exists x \, A(x) \to \forall x \, A(x)$
2. $\forall x \, A(x) \to \exists x \, A(x)$
3. $\forall x \, \exists y \, A(x,y) \to \exists x \, \forall y \, A(x,y)$
4. $\exists x \, \forall y \, A(x,y) \to \forall x \, \exists y \, A(x,y)$

Esercizio 2.5. Stabilire quali delle seguenti formule sono valide e quali sono solo soddisfacibili. Nel secondo caso, fornire un esempio di interpretazione che non ne è un modello.

1. $(\exists x \, A(x) \to \forall x \, B(x)) \to \forall x \, (A(x) \to B(x))$
2. $(\exists x \, A(x) \to \exists x \, B(x)) \to \forall x \, (A(x) \to B(x))$
3. $(\exists x \, A(x) \to \exists x \, B(x)) \to \exists x \, (A(x) \to B(x))$
4. $\exists x \, (A(x) \to B(x)) \to (\forall x \, A(x) \to \forall x \, B(x))$
5. $\exists x \, (A(x) \to B(x)) \to (\forall x \, A(x) \to \exists x \, B(x))$
6. $\exists x \, (A(x) \to B(x)) \to (\exists x \, A(x) \to \exists x \, B(x))$
7. $\forall x \, (A(x) \to B(x)) \to (\exists x \, A(x) \to \forall x \, B(x))$
8. $\forall x \, (A(x) \to B(x)) \to (\exists x \, A(x) \to \exists x \, B(x))$
9. $\forall x \, (A(x) \to B(x)) \to (\forall x \, A(x) \to \forall x \, B(x))$
10. $(\forall x \, A(x) \to \forall x \, B(x)) \to \forall x \, (A(x) \to B(x))$
11. $(\forall x \, A(x) \to \exists x \, B(x)) \to \exists x \, (A(x) \to B(x))$
12. $(\forall x \, A(x) \to \exists x \, B(x)) \to \forall x \, (A(x) \to B(x))$

Esercizio 2.6. Dimostrare che le seguenti formule non sono valide.

1. $(\forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)) \to (\forall x\, (A(x) \to B(x)))$
2. $(\forall x\, (A(x) \vee B(x))) \to ((\forall x\, A(x)) \vee (\forall x\, B(x)))$

Esercizio 2.7. Trovare una forma normale prenessa equivalente alle seguenti formule:

1. $(\forall x\, (A(x) \to B(x, y))) \to ((\exists y\, A(y)) \to (\exists z\, B(y, z)))$
2. $\exists x\, A(x, y) \to (B(x) \to \neg \exists y\, A(x, y))$