ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA

Prof. F. Bottacin

Insiemi, corrispondenze, applicazioni

Esercizio 1. Siano A, B e C degli insiemi. Si stabilisca se valgono o meno le seguenti uguaglianze:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Esercizio 2. Siano A e B due insiemi. Si dimostri che

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Esercizio 3. Sia X un insieme fissato. Per ogni sottoinsieme Y di X poniamo $\bar{Y} = X \setminus Y$. Siano A e B due sottoinsiemi di X. Si dimostri che

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Esercizio 4. Siano A, B e C tre insiemi. Che relazioni ci sono tra $A \cup (B \triangle C)$ e $(A \cup B) \triangle (A \cup C)$?

Esercizio 5. Siano A, B e C tre insiemi. Che relazioni ci sono tra $A \cap (B \triangle C)$ e $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$?

Esercizio 6. Siano A, B e C tre insiemi. Si dimostri che

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Esercizio 7. Sia $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Si descriva l'insieme delle parti di A, elencandone gli elementi.

Esercizio 8. Sia R la corrispondenza di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ definita da

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2x = -3y\}.$$

Si dica se R è una applicazione.

Esercizio 9. Sia R la corrispondenza di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ definita da

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \mid 2x = 5y\}.$$

Si dica se R è una applicazione.

Esercizio 10. Sia R la corrispondenza di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ definita da

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid |x| = y^2\}.$$

Si dica se R è una applicazione.

Esercizio 11. Sia R la corrispondenza di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ definita da

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2x^3 - 3x^2 = y\}.$$

Si dica se R è una applicazione.

Esercizio 12. Sia R la corrispondenza di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ definita da

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid x^2 = |2y^3|\}.$$

Si dica se R è una applicazione.

Esercizio 13. Sia A un insieme con n elementi e sia $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A.
(a) Si dica se esiste una applicazione iniettiva da A in $\mathcal{P}(A)$.
(b) Si dica se esiste una applicazione suriettiva da A in $\mathcal{P}(A)$.
(c) Si dica se la corrispondenza

$$R_1 = \{(a, X) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid a \in X\}$$

è o meno una funzione.
(d) Si dica se la corrispondenza

$$R_2 = \{(a, \{a\}) \in A \times \mathcal{P}(A)\}$$

è o meno una funzione.

Esercizio 14. Siano A e B due insiemi e $f : A \to B$ una funzione. È vero o falso che

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y),$$

per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A?

Esercizio 15. Siano A e B due insiemi e $f : A \to B$ una funzione. È vero o falso che

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y),$$

per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A?

Esercizio 16. Siano A e B due insiemi e $f : A \to B$ una funzione. È vero o falso che

$$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y),$$

per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di B?

Esercizio 17. Siano A e B due insiemi e $f : A \to B$ una funzione. È vero o falso che

$$f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y),$$

per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di B?

Esercizio 18. Siano A e B due insiemi e $f : A \to B$ una funzione. È vero o falso che

$$f^{-1}(f(X)) = X,$$

per ogni sottoinsieme X di A?

Esercizio 19. Siano A e B due insiemi e $f : A \to B$ una funzione. È vero o falso che

$$f(f^{-1}(X)) = X,$$

per ogni sottoinsieme X di B?

Esercizio 20. Siano A e B due insiemi e $f : A \to B$ una funzione. È vero o falso che

$$f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y),$$

per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A?

Esercizio 21. Siano A e B due insiemi e $f : A \to B$ una funzione. È vero o falso che

$$f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y),$$

per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di B?

Esercizio 22. Siano A e B due insiemi e $f : A \to B$ una funzione. È vero o falso che

$$f(X \bigtriangleup Y) = f(X) \bigtriangleup f(Y),$$

per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A?

Esercizio 23. Siano A e B due insiemi e $f : A \to B$ una funzione. È vero o falso che

$$f^{-1}(X \bigtriangleup Y) = f^{-1}(X) \bigtriangleup f^{-1}(Y),$$

per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di B?

Esercizio 24. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(n) = n^3 + 1$. Si dica se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

Esercizio 25. Sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(m, n) = m - n$. Si dica se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

Esercizio 26. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(n) = (n - 1, n + 1)$. Si dica se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

Esercizio 27. Sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(m, n) = (n - 2, m + 1)$. Si dica se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

Esercizio 28. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ è pari}, \\ -(n+1)/2 & \text{se } n \text{ è dispari}. \end{cases}$$

Si dica se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

Esercizio 29. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto f(n) = n - n^2 + 1$, e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $m \mapsto g(m) = \frac{m-1}{m^2+1}$. Si determini la funzione composta $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

Esercizio 30. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. Se $g \circ f$ è iniettiva, f deve necessariamente essere iniettiva? Se $g \circ f$ è iniettiva, g deve necessariamente essere iniettiva? Se $g \circ f$ è suriettiva, f deve necessariamente essere suriettiva? Se $g \circ f$ è suriettiva, g deve necessariamente essere suriettiva? Se $g \circ f$ è biiettiva, sia f che g devono necessariamente essere biiettive?

Esercizio 31. Sia $f : A \to B$ una funzione. Supponendo che esista una funzione $g : B \to A$ tale che $g(f(x)) = x$, per ogni $x \in A$, si può concludere che f deve essere biiettiva?