

MATEMATICA DISCRETA

PROF. F. BOTTACIN

Aritmetica

Esercizio 1. Siano $a, b \in \mathbb{N}$, sia (a, b) il loro massimo comun divisore e $[a, b]$ il loro minimo comune multiplo. Si dimostri che $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

Esercizio 2. Si calcoli il massimo comun divisore positivo d di $a = 235$ e $b = 755$, utilizzando l'algoritmo di Euclide. Si determinino due interi α e β tali che $d = a\alpha + b\beta$.

Esercizio 3. Si calcoli il massimo comun divisore positivo d di $a = 660293$ e $b = 504467$, utilizzando l'algoritmo di Euclide. Si provi a ottenere lo stesso risultato utilizzando la decomposizione in fattori primi dei due numeri a e b . Quale dei due metodi è più conveniente?

Esercizio 4. Si dimostri per induzione che

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esercizio 5. Si dimostri per induzione che, per ogni numero reale $q \neq 0, 1$, si ha

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Esercizio 6. Si dimostri per induzione che, per ogni intero $n \geq 2$, si ha

$$\prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{n}.$$

Esercizio 7. Si determini il più grande intero n tale che 7^n divide $777!$.

Esercizio 8. Con quanti zeri termina $1000!$? (rispondere senza calcolare $1000!$).