Matematica Discreta e Logica Matematica
ESERCIZI

Proff. F. Bottacin e C. Delizia

Esercizio 1. Scrivere la tavola di verità della seguente formula ben formata e determinare se essa è una tautologia:

$$A \to ((A \to B) \to \neg A \wedge B)$$

Esercizio 2. Si scriva una formula ben formata P che abbia la seguente tavola di verità:

A	B	C	P
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Esercizio 3. Si determinino una formula in forma normale congiuntiva ed una in forma normale disgiuntiva equivalenti alla seguente formula ben formata:

$$(A \wedge B \to \neg C) \to \neg(B \vee \neg A)$$

Esercizio 4. Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$\neg(\exists x\, A(x) \to \forall y\, B(y)) \to \forall x\, A(x) \vee \exists y\, B(y)$$

Esercizio 5. Dati tre insiemi qualunque A, B e C, si dimostri che vale la seguente uguaglianza:

$$(A \triangle B) \cap C = \big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) \setminus (A \cap B \cap C)$$

Esercizio 6. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \leq 32 \text{ e } n \text{ è divisibile per } 4\}, \quad B = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \text{ divide } 24\}.$$

(a) Si descrivano in modo esplicito (elencandone gli elementi) gli insiemi A e B.

(b) Si descrivano in modo esplicito (elencandone gli elementi) gli insiemi $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$.

(c) Quante sono le funzioni iniettive da A in B?

(d) Quante sono le funzioni iniettive da B in A?

(e) Quante sono le funzioni biiettive da B in B?

(f) Quanti elementi ha l'insieme delle parti di B?

Esercizio 7. Sia $f : A \to B$ una funzione. Si dimostri che, se f è iniettiva, si ha

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y),$$

per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A. Si fornisca un esempio per mostrare che, se f non è iniettiva, la precedente uguaglianza potrebbe non essere vera.

Esercizio 8. Per ciascuna delle seguenti corrispondenze tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ si stabilisca se essa è una funzione (*tutte le risposte devono essere motivate*):

(a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \,:\, x^2 = 3y + 1\}$.

(b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \,:\, 4x + 4 = y^2\}$.

(c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \,:\, x^2 = y^2\}$.

(d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \,:\, |2x - 1| = 3y + 2\}$.

(e) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \,:\, 2x - 4 = |y + 1|\}$.

Esercizio 9. Per ciascuna delle seguenti corrispondenze, si stabilisca se essa è un'applicazione, motivando la risposta.

(a) $\mathscr{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}_p \times \mathbb{Z} \,:\, x = 4y\}$

(b) $\mathscr{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}_d \times \mathbb{Z} \,:\, x = |y| + 1\}$

(c) $\mathscr{R}_3 = \{([x]_3, [y]_2) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \,:\, x = y\}$

Esercizio 10. Si considerino le applicazioni

$$f : z \in \mathbb{Z} \mapsto 3|z| + 4 \in \mathbb{N} \qquad g : n \in \mathbb{N} \mapsto n + 6 \in \mathbb{N}.$$

(a) Si stabilisca se f è iniettiva, e perché.

(b) Si stabilisca se f è suriettiva, e perché.

(c) Si stabilisca se g è iniettiva, e perché.

(d) Si stabilisca se g è suriettiva, e perché.

(e) Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

(f) Si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva, e perché.

(g) Si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva, e perché.

(h) Si calcoli:

- $f(\{-2\,,\,-1\,,\,0\,,\,1\,,\,2\}) =$
- $f(2\mathbb{Z}) =$
- $f^{-1}(\{0\,,\,5\,,\,7\,,\,13\}) =$
- $g(\{0\,,\,12\,,\,18\,,\,36\}) =$
- $g^{-1}(\{0\,,\,1\,,\,2\}) =$
- $g^{-1}(\mathbb{N} \setminus \{7\,,\,13\}) =$
- $(g \circ f)(5\mathbb{Z}) =$
- $(g \circ f)^{-1}(\{8\,,\,16\}) =$

Esercizio 11. Si consideri l'applicazione

$$h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto 7x - 5.$$

Si verifichi che h è invertibile, e se ne determini l'inversa.

Esercizio 12.

(a) Quanti sono gli anagrammi (non necessariamente di senso compiuto) della parola "QUADERNO"?

(b) Quanti sono gli anagrammi (non necessariamente di senso compiuto) della parola "COLLOCAMENTO"?

(c) Dato un alfabeto composto da 24 simboli, quante parole (cioè sequenze di simboli) di lunghezza compresa tra 1 e 6 (inclusi) si possono formare?

(d) Quante sono le funzioni iniettive da un insieme di 4 elementi in un insieme di 8 elementi?

(e) Quanti sono i sottoinsiemi di cardinalità 6 di un insieme contenente 15 elementi?

Esercizio 13. Si consideri il seguente numero espresso in base 5, $N = (3102)_5$. Si determini l'espressione di N in base 7.

Esercizio 14. Si determini il quoziente q e il resto r delle seguenti divisioni tra numeri interi:

(a) 18 diviso 7.

(b) -16 diviso 3.

(c) 14 diviso -6.

(d) -13 diviso -4.

Esercizio 15. Si calcoli il massimo comun divisore positivo d di $a = 2242$ e $b = 754$, utilizzando l'algoritmo di Euclide. Si determinino inoltre due interi α e β tali che $a\,\alpha + b\,\beta = d$.

Esercizio 16. Si dimostri per induzione che, per ogni intero $n \geq 2$, si ha

$$3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2 - 1.$$

Esercizio 17. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 10$ risulta

$$10 + 11 + 12 + \cdots + n = \frac{n^2 + n - 90}{2}.$$

Esercizio 18. In $\mathbb{Z}$ si consideri la relazione $\sim$ definita come segue:

$$x \sim y \text{ se } 5x - 3y \text{ è pari.}$$

(a) Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

(b) Si descrivano le classi di equivalenza degli elementi 1 e 2.

(c) Si descriva l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\sim$.

Esercizio 19. Determinare tutti i numeri interi x che sono soluzioni della seguente equazione congruenziale: $213\,x \equiv 3 \mod 7351$.

Esercizio 20. Si risolva il seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 4x \equiv 5 \mod 11 \\ 5x \equiv 2 \mod 7 \\ 8x \equiv 1 \mod 13 \end{cases}$$

Esercizio 21. Sia S l'insieme costituito dai numeri naturali della forma $2^a\,7^b$, con a, $b \in \mathbb{N}$:

$$S = \{2^a\,7^b \,:\, a, b \in \mathbb{N}\}.$$

Si definisca in S un'operazione binaria $\star$ ponendo

$$2^a\,7^b \star 2^c\,7^d = 2^{a+c}\,7^{bd}.$$

- Si dimostri che $(S, \star)$ è un monoide commutativo, specificandone l'elemento neutro.
- Quali sono gli elementi simmetrizzabili del monoide $(S, \star)$?
- Si provi che l'applicazione $f : 2^a\,7^b \in S \mapsto a \in \mathbb{N}$ è un omomorfismo di monoidi tra $(S, \star)$ e $(\mathbb{N}, +)$, dove $+$ denota l'usuale somma in $\mathbb{N}$.
- Perché f non è un isomorfismo di monoidi?
- Si provi che l'applicazione $g : 2^a\,7^b \in S \mapsto b^2 \in \mathbb{N}$ è un omomorfismo di monoidi tra $(S, \star)$ e $(\mathbb{N}, \cdot)$, dove $\cdot$ denota il prodotto usuale in $\mathbb{N}$.
- Si dimostri che l'insieme $T = \{2^a\,7^b \,:\, a, b \in \mathbb{N}_p\}$ è una parte stabile di $(S, \star)$.
- Si dimostri che l'insieme $V = \{2^a\,7^b \,:\, a \in \mathbb{N}_d, b \in \mathbb{N}_p\}$ non è una parte stabile di $(S, \star)$.

Esercizio 22. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi si consideri l'operazione interna $\perp$ definita ponendo

$$n \perp m = n + m + 2,$$

per ogni n, $m \in \mathbb{Z}$.

- Si dimostri che $\mathbb{N}$ è una parte stabile di $(\mathbb{Z}, \perp)$.
- Si dimostri che $(\mathbb{Z}, \perp)$ è un gruppo abeliano.
- Si verifichi che la relazione $\mathscr{R}$ definita in $\mathbb{Z}$ ponendo

  $$n \,\mathscr{R}\, m \Leftrightarrow 5 \text{ divide } m - n$$

  è di equivalenza.

- Si descriva l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\mathscr{R}$.
- Si provi che la relazione $\mathscr{R}$ è compatibile con l'operazione $\perp$ in $\mathbb{Z}$, e che quindi la posizione

$$[n]_{\mathscr{R}} \ \perp\ [m]_{\mathscr{R}} = [n+m+2]_{\mathscr{R}}$$

  definisce un'operazione binaria nell'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\mathscr{R}$.
- Si provi che l'applicazione $f : [n]_{\mathscr{R}} \in \mathbb{Z}/\mathscr{R} \mapsto [2n]_5 \in \mathbb{Z}_5$ è ben posta.
- Si dimostri che f non è un omomorfismo di gruppi tra $(\mathbb{Z}/\mathscr{R}, \perp)$ e $(\mathbb{Z}_5, +)$.