Quesito 1	Quesito 2	Quesito 3	Quesito 4	Somma	Voto finale

Esame scritto di Analisi Reale per il corso di Laurea in Matematica 07/01/09.

COGNOME.................. NOME.................. MATRICOLA..................

Avvertenze. Il tempo concesso per lo svolgimento è di 120 minuti. Durante questo tempo NON è permesso uscire dall'aula, se non per la consegna, che non dovrà comunque avvenire prima di 45 minuti dall'inizio della prova. NON è concesso consultare nè testi nè appunti. NON è permesso l'uso di macchine calcolatrici. La risposta a ciascun quesito deve essere scritta nello spazio immediatamente sottostante il testo del medesimo. È permesso scrivere su ambo le facciate di ciascuna pagina. Allo studente NON è consentita la consegna di alcun foglio di brutta. Ogni foglio di brutta consegnato verrà cestinato.

Quesito 1.

(a) Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, ove $X \subset \mathbb{R}$. Sia $E \subset \mathbb{R}$ con $E \neq \emptyset$, $E \cap X = \emptyset$. Provare che la collezione di insiemi

$$\mathcal{N} = \mathcal{M} \cup \{A \cup E : \ A \in \mathcal{M}\}$$

è una σ-algebra in $X \cup E$.

(b) Sia $c \geq 0$ fissato. Posto

$$\nu(A \cup E) = \mu(A) + c, \qquad \nu(A) = \mu(A),$$

per ogni $A \in \mathcal{M}$, provare che ν è una misura su $\mathcal{N}$.

(c) Dare la definzione generale di misura esterna.

(d) Siano X un insieme, $\mathcal{E}$ una famiglia di sottoinsiemi di X che contiene $\emptyset$ e X e $\varrho : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ una funzione tale che $\varrho(\emptyset) = 0$. Come definire una misura esterna $\varrho^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ mediante ϱ ?

Risposta:

.

Quesito 2.

(a) Siano $\mu_F^{(B)}$ la misura Boreliana associata ad una funzione F, $\mu_F^{(SL)}$ la misura di Stieltjes – Lebesgue associata ad F, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ la σ-algebra di tutti i sottoinsiemi Lebesgue misurabili di $\mathbb{R}$ e m la misura di Lebesgue su $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.

Completare la seguente tabella con SI o NO (non è richiesta alcuna giustificazione):

la funzione F	esiste una misura Boreliana positiva $\mu_F^{(B)}$ tale che $\mu_F^{(B)}(]a,b]) = F(b) - F(a)$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$	esiste una misura Boreliana positiva $\mu_F^{(B)}$ tale che $\mu_F^{(B)}(]a,b]) = F(b) - F(a)$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$ e tale che $\mu_F^{(B)}(\{a\}) = 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$	esistono $c_1, c_2 > 0$ tali che $c_1 m(A) \leq \mu_F^{(SL)}(A) \leq c_2 m(A)$ $\forall A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$
$F_1(x) = x + \sin x$			
$F_2(x) = x + \cos x$			
$F_3(x) = \begin{cases} x + \sin x & \text{se } x < 0 \\ x + \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$			
$F_4(x) = \begin{cases} x + \sin x & \text{se } x \leq 0 \\ x + \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases}$			
$F_5(x) = \begin{cases} x + \cos x & \text{se } x < 0 \\ x + \sin x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$			
$F_6(x) = \begin{cases} x + \sin x + 1 & \text{se } x < 0 \\ x + \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$			
$F_7(x) = 2x + \sin x$			

(b) Chi è la misura $\mu_{F_6}^{(B)} - \mu_{F_3}^{(B)}$? (Non è richiesta alcuna giustificazione.)

Risposta:

.

Quesito 3.

(a) Utilizzando il teorema della convergenza monotona (il teorema di Beppo Levi), calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{2009} \frac{1-\sin\frac{x}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}\,dx\,.$$

(b) Utilizzando il teorema della convergenza monotona generalizzato (il teorema di Beppo Levi generalizzato), calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^{n} \frac{1-\sin^4\frac{x}{n}}{x+\frac{1}{n}}\,dx\,.$$

(c) Utilizzando il teorema della convergenza dominata (il teorema di Lebesgue), calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{x}\right)^3 dx\,.$$

(*Suggerimento. Dividere l'integrale su* $[0,\infty[$ *in due integrali su* $[0,1[$ *e su* $[1,\infty[$.)

Quesito 4.

(a) Siano $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$ ed $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$. Utilizzando la disuguaglanza di Hölder, provare che $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} \, \|f\|^{1-\alpha}_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)} \,,$$

ove il numero $\alpha \in]0,1[$ é definito dall'uguaglianza $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$.

(*Suggerimento.* $|f| = |f|^{\alpha}|f|^{1-\alpha}$.)

(b) Dare la definizione di misure mutuamente singolari ed enunciare il teorema di decomposizione di Jordan per la misura con segno ν. Definire la variazione totale di ν.

(c) Dare la definizione di funzione assolutamente continua.

Risposta:

.