Quesito 1	Quesito 2	Quesito 3	Quesito 4	Somma	Voto finale

Prova scritta di Analisi Reale per il corso di Laurea in Matematica 16/12/08.

COGNOME.................... NOME.................... MATRICOLA....................

Avvertenze. Il tempo concesso per lo svolgimento è di 120 minuti. Durante questo tempo NON è permesso uscire dall'aula, se non per la consegna, che non dovrá comunque avvenire prima di 45 minuti dall'inizio della prova. NON è concesso consultare nè testi nè appunti. NON è permesso l'uso di macchine calcolatrici. La risposta a ciascun quesito deve essere scritta nello spazio immediatamente sottostante il testo del medesimo. È permesso scrivere su ambo le facciate di ciascuna pagina. Allo studente NON è consentita la consegna di alcun foglio di brutta. Ogni foglio di brutta consegnato verrà cestinato.

Quesito 1.

(a) Dare la definizione di misura completa e un esempio di misura non completa.

(b) Dare la definizione di misura σ-finita e un esempio di misura σ-finita che non è finita.

(c) Dare la definizione di misura esterna.

(d) Dare la definizione di insieme misurabile alla Caratheodory ed enunciare il Teorema di Caratheodory.

Risposta:

Quesito 2.

(a) Utilizzando il teorema della convergenza monotona (il teorema di Beppo Levi), calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{2009} \frac{n\cos\frac{x}{n}}{nx+1}\,dx$$

dandone una dettagliata giustificazione.

(b) Utilizzando il teorema della convergenza monotona generalizzato (il teorema di Beppo Levi generalizzato), calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^{n} \frac{\cos^2\frac{x}{n}}{x}\,dx$$

dandone una dettagliata giustificazione.

(c) Utilizzando il teorema della convergenza dominata (il teorema di Lebesgue), calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2\frac{x}{n}}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$$

dandone una dettagliata giustificazione.

(*Suggerimento. Dividere l'integrale su* $[0,\infty[$ *in due integrali su* $[0,1[$ *e su* $[1,\infty[$.)

Risposta:

Quesito 3.

(a) Formulare le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.

(b) Sia $0 < p < \infty$. Provare che se $\alpha \geq \frac{1-n}{p}$ allora la successione $f_k(x) = |x|^\alpha \chi_{B(0,k+1)\setminus B(0,k)}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, non converge a 0 in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $k \to \infty$.

(c) Sia $0 < p < q \leq \infty$. Provare che se A è un insieme misurabile in $\mathbb{R}^N$ di misura finita allora

$$\|f\|_{L^p(A)} \leq (\text{meas}\, A)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(A)}$$

per ogni $f \in L^q(A)$.

Risposta:

.

Quesito 4.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Provare che esiste una unica misura Boreliana finita ν_f su $\mathbb{R}$ tale che $\nu_f(-\infty, x] = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare la decomposizione di Radon-Nikodym della misura ν_f dandone dettagliata giustificazione.

(c) Determinare una decomposizione di Hahn per la misura ν_f.