Quesito 1	Quesito 2	Quesito 3	Somma	Voto finale

Primo Compitino di Analisi Reale per il corso di Laurea in Matematica 06/11/08.

COGNOME.................... NOME.................... MATRICOLA....................

Avvertenze. Il tempo concesso per lo svolgimento é di 90 minuti. Durante questo tempo NON è permesso uscire dall'aula, se non per la consegna, che non dovrá comunque avvenire prima di 45 minuti dall'inizio della prova. NON è concesso consultare nè testi nè appunti. NON è permesso l'uso di macchine calcolatrici. La risposta a ciascun quesito deve essere scritta nello spazio immediatamente sottostante il testo del medesimo. È permesso scrivere su ambo le facciate di ciascuna pagina. Allo studente NON è consentita la consegna di alcun foglio di brutta. Ogni foglio di brutta consegnato verrà cestinato.

Quesito 1.

(a) Siano $x_n, y_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Provare che

$$\limsup_{n\to\infty} x_n y_n \leq \left(\limsup_{n\to\infty} x_n\right) \left(\limsup_{n\to\infty} y_n\right)$$

(b) Siano x_n, y_n come in (a) e si assuma che il limite $\lim_{n\to\infty} y_n$ esista finito. Provare che

$$\limsup_{n\to\infty} x_n y_n = \left(\limsup_{n\to\infty} x_n\right) \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right).$$

(*Suggerimento.* Sia $\lim_{n\to\infty} y_n = l$. Tenere conto che $\forall\varepsilon > 0$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > m$ si ha $y_n > l - \varepsilon$.)

(c) Calcolare il limite inferiore e il limite superiore della successione

$$x_n = \frac{n^2 \sin \frac{\pi n}{2}}{n^2 + 1}.$$

Risposta:

.

Quesito 2.

(a) Dare la definizione di σ-algebra. Provare che la topologia standard $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ di $\mathbb{R}$ non è una σ-algebra.

(b) Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato ($\Longleftrightarrow$ uno spazio di misura) e $E \in \mathcal{M}$. Poniamo

$$\mu_{E}(A) = \mu(A \cap E) \qquad \forall A \in \mathcal{M}\,.$$

Provare che μ_{E} è una misura su $\mathcal{M}$.

(c) Dare la definizione generale di misura esterna.

(d) Siano X un insieme, $\mathcal{E}$ una famiglia di sottoinsiemi di X che contiene $\emptyset$ e X e $\varrho : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ una funzione tale che $\varrho(\emptyset) = 0$. Come definire una misura esterna $\varrho^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ mediante da ϱ ?

Risposta:

Quesito 3.

(a) Siano $\mu_F^{(B)}$ la misura Boreliana associata ad una funzione F, $\mu_F^{(SL)}$ la misura di Stieltjes – Lebesgue associata ad F, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ la σ-algebra di tutti i sottoinsiemi Lebesgue misurabili di $\mathbb{R}$ e m la misura di Lebesgue su $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.

Completare la seguente tabella con SI o NO (non è richiesta alcuna giustificazione):

la funzione F	esiste una misura Boreliana $\mu_F^{(B)}$ tale che $\mu_F^{(B)}(]a,b]) = F(b) - F(a)$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$	esiste una misura Boreliana $\mu_F^{(B)}$ tale che $\mu_F^{(B)}(]a,b]) = F(b) - F(a)$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$ e tale che $\mu_F^{(B)}(\{a\}) = 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$	esistono $c_1, c_2 > 0$ tali che $c_1 m(A) \leq \mu_F^{(SL)}(A) \leq c_2 m(A)$ $\forall A \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$
$x + \sin x$			
$x + \cos x$			
$\begin{cases} x + \sin x & \text{se } x < 0 \\ x + \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$			
$\begin{cases} x + \sin x & \text{se } x \leq 0 \\ x + \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases}$			
$\begin{cases} x + \cos x & \text{se } x < 0 \\ x + \sin x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$			
$\begin{cases} x + \sin x + 1 & \text{se } x < 0 \\ x + \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$			
$2x + \sin x$			

(b) Dare la definizione di Lebesgue misurabilità di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Provare che la funzione caratteristica χ_A è Lebesgue misurabile se e solo se l'insieme A è Lebesgue misurabile.

Risposta:

.