Quesito 1	Quesito 2	Quesito 3	Somma	Voto finale

Secondo Compitino di Analisi Reale per il corso di Laurea in Matematica 12/12/08.

COGNOME.................. NOME.................. MATRICOLA..................

Avvertenze. Il tempo concesso per lo svolgimento é di 90 minuti. Durante questo tempo NON è permesso uscire dall'aula, se non per la consegna, che non dovrá comunque avvenire prima di 45 minuti dall'inizio della prova. NON è concesso consultare nè testi nè appunti. NON è permesso l'uso di macchine calcolatrici. La risposta a ciascun quesito deve essere scritta nello spazio immediatamente sottostante il testo del medesimo. È permesso scrivere su ambo le facciate di ciascuna pagina. Allo studente NON è consentita la consegna di alcun foglio di brutta. Ogni foglio di brutta consegnato verrà cestinato.

Quesito 1.

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{M}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$.

(a) Dare la definizione di integrale $\int_A f\, d\mu$ per una funzione semplice, $\mathcal{M}$-misurabile su A e non-negativa.

(b) Dare la definizione di integrale $\int_A f\, d\mu$ per una funzione $\mathcal{M}$-misurabile su A e non-negativa.

(c) Dare la definizione di integrale $\int_A f\, d\mu$ per una funzione $\mathcal{M}$-misurabile su A.

(d) Siano f $\mathcal{M}$-misurabile su A ed $f_0(x) = f(x)$ se $x \in A$, $f_0(x) = 0$ se $x \in A^c$. Utilizzando solo le definizioni in (a), (b), (c) e proprietà della misura μ, provare che

$$\int_X f_0\, d\mu = \int_A f\, d\mu\,.$$

Risposta:

.

Quesito 2.

(a) Utilizzando il teorema della convergenza monotona (il teorema di Beppo Levi), calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{2008} \frac{1-\sin\frac{x}{n}}{x+\frac{1}{n}}\,dx\,.$$

(b) Utilizzando il teorema della convergenza monotona generalizzato (il teorema di Beppo Levi generalizzato), calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^{n} \frac{1-|\sin\frac{x}{n}|}{x}\,dx\,.$$

(c) Utilizzando il teorema della convergenza dominata (il teorema di Lebesgue), calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin\frac{x}{n}}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx\,.$$

(*Suggerimento. Dividere l'integrale su* $[0,\infty[$ *in due integrali su* $[0,1[$ *e su* $[1,\infty[$.)

(d) (**Facoltativo**.) Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\infty} \frac{1-\sin\frac{x}{n}}{x}\,\chi_{]n,n+1[}(x)\,dx\,.$$

Risposta:

.

Quesito 3.

(a) Sia $0 < p < \infty$. Provare che la successione $f_k(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \chi_{B(0,k+1)\setminus B(0,k)}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, converge a 0 in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $k \to \infty$.

(b) Sia $0 < p \leq p_1, p_2 \leq \infty$ e $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$. Utilizzando la disuguaglanza di Hölder, provare che per ogni $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$ il prodotto $f_1 f_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f_1 f_2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)} .$$

(c) Dare la definizione di misure mutualmente singolari ed enunciare il teorema di decomposizione di Jordan per la misura con segno ν. Definire la variazione totale di ν.

Risposta:

.