Es. 1	Es. 2	Es. 3	Somma	Voto finale

Secondo Compitino di Analisi Reale per il corso di Laurea in Matematica 05/12/06.

COGNOME.................. NOME.................. MATRICOLA..................

Avvertenze. Il tempo concesso per lo svolgimento é di 90 minuti. Durante questo tempo NON è permesso uscire dall'aula, se non per la consegna, che non dovrá comunque avvenire prima di 45 minuti dall'inizio della prova. NON è concesso consultare nè testi nè appunti. NON è permesso l'uso di macchine calcolatrici. La risposta a ciascun quesito deve essere scritta nello spazio immediatamente sottostante il testo del medesimo. È permesso scrivere su ambo le facciate di ciascuna pagina. Allo studente NON è consentita la consegna di alcun foglio di brutta. Ogni foglio di brutta consegnato verrà cestinato.

Quesito 1.

(a) Enunciare il Teorema della Convergenza Dominata.
(b) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n n \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \sin\frac{x}{n}\, dx\,.$$

(c) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{n} e^{\frac{nx}{n+1}}\, dx\,.$$

Risposta:

Quesito 2.

(a) Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, $A \in \mathcal{M}$, $0 < p \le p_1,\, p_2 \le \infty$, $f_1 \in L_{p_1}(A)$ e $f_2 \in L_{p_1}(A)$. Formulare la disuguaglianza di Hölder.
(b) Formulare e provare con l'aiuto del punto (a) la disuguaglianza di Hölder per tre funzioni f_1, f_2 e f_3.
(c) Trovare tutti i valori di $\delta \in \mathbb{R}$ tali che

$$|x|^{-\frac{n}{p}}(1 + |\ln|x|\,|)^{\delta} \in L^p(\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)),$$

ove $B(0,R)$ denota la palla in $\mathbb{R}^N$ di centro zero e raggio R.
Risposta:

Quesito 3.

(a) Dare la definizione di misura con segno.
(b) Formulare il Teorema di decomposizione di Hahn.
(c) Siano $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, m)$ lo spazio misurato ove m è la misura di Lebesgue,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} & \text{se } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{se } |x| < 1, \end{cases}$$

e $\nu(E) = \int_E f d\mu$, $\forall E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.

Dare un esempio di due coppie di insiemi P, N e P', N' tali che P, P' sono positivi rispetto alla misura ν, N, N' sono negativi rispetto alla misura ν e tali che

$$\mathbb{R} = P \cup N, \; P \cap N = \emptyset, \quad \mathbb{R} = P' \cup N', \; P' \cap N' = \emptyset.$$

Provare che $P \vartriangle P'$ e $N \vartriangle N'$ sono nulli rispetto alla ν.

Risposta: