Un esempio di primo compitino con traccia di soluzione

Quesito 1. (a) Dare la definizione di limite superiore e inferiore di una successione in $\overline{R}$.

(b) Calcolare il limite superiore e inferiore della successione

$$x_n = e^{\left(\frac{3n}{n+1}+\cos n\pi\right)}, \quad n \in N.$$

(c) Calcolare $\limsup_{x\to+\infty} f(x)$, ove $f(x) = e^{\left(\frac{3x}{x+1}+\cos x\pi\right)}$ per ogni $x \in R$.

Risposta: (a) Si rinvia alle note on-line.

(b) Si noti che

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = e^4, \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = e^2.$$

Essendo che i numeri naturali sono esattamente l'unione dei numeri naturali pari e dei numeri naturali dispari, segue che

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \min\{e^2, e^4\} = e^2, \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = \max\{e^2, e^4\} = e^4.$$

(c) Ovviamente si ha che $f(x) \leq e^4$ per ogni $x > 0$. Inoltre essendo che $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = e^4$, segue che per ogni $M > 0$

$$\sup_{x\geq M} f(x) = e^4$$

e quindi dalla definizione segue che

$$\limsup_{x\to+\infty} f(x) = e^4.$$

Quesito 2. (a) Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, ove $X \subset R$. Sia $E \subset R$ con $E \neq \emptyset$, $E \cap X = \emptyset$. Provare che la collezione di insiemi

$$\mathcal{N} = \mathcal{M} \cup \{A \cup E : \ A \in \mathcal{M}\}$$

è una σ-algebra in $X \cup E$.

(b) Sia $c \geq 0$ fissato. Posto

$$\nu(A \cup E) = \mu(A) + c, \qquad \nu(A) = \mu(A),$$

per ogni $A \in \mathcal{M}$, provare che ν è una misura su $\mathcal{N}$.

(c) Dare la defnzione generale di misura esterna.

(d) Enunciare il Teorema di Carathéodory.

Risposta: (a) Proviamo la chiusura di $\mathcal{N}$ rispetto alla complementazione. Se $A \in \mathcal{M}$ allora $(X \cup E) \setminus A = (X \setminus A) \cup E \in \mathcal{N}$. Inoltre $(X \cup E) \setminus (A \cup E) = X \setminus A \in \mathcal{N}$. La chiusura di $\mathcal{N}$ rispetto alla unione numerabile è quasi banale e si lascia come esercizio.

(b) Ovvio che $\nu(\emptyset) = 0$. Sia $\{B_n\}_{n \in N}$ una successione di elementi di $\mathcal{N}$ a due a due disgiunti. Se tali elementi appartengono tutti a $\mathcal{M}$ non vi è niente da dimostrare. Viceversa si verifica che solo uno di essi contiene E: supponiamo direttamente che tale elemento sia B_1 e che quindi $B_1 = A_1 \cup E$ per un qualche $A_1 \in \mathcal{M}$ e che $B_n \in \mathcal{M}$ per ogni $n \neq 1$. Avremo quindi che

$$\nu(\cup_{n \geq 1} B_n) = \nu((\cup_{n>1} B_n) \cup A_1 \cup E) = (\sum_{n>1} \mu(B_n)) + \mu(A_1) + c.$$

Inoltre

$$\sum_{n \geq 1} \nu(B_n) = \nu(B_1) + \sum_{n>1} \nu(B_n) = \mu(A_1) + c + \sum_{n>1} \mu(B_n).$$

Come si vede dunque la proprietà di additività numerabile è verificata.

Per (c), (d) si rinvia alle note del corso.

Quesito 3. Siano $F(x) = 3x + 2\sin x$, per ogni $x \in R$ e

$$G(x) = \begin{cases} 1 + 3x + 2\sin x & \text{se } x \geq 0, \\ 3x + 2\sin x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(a) Provare che F e G definiscono due misure Boreliane $\mu_F^{(B)}$ e $\mu_G^{(B)}$ tali che $\mu_F^{(B)}(a, b] = F(b) - F(a)$ e $\mu_G^{(B)}(a, b] = G(b) - G(a)$ per ogni $a, b \in R$ con $a < b$.

(b) Sia $E \in B_R$. Provare che $\mu_F^{(B)}(E) = 0$ se e solo se la misura di Lebesgue $m(E)$ di E è zero.

(c) Chi è la misura $\mu_G^{(B)} - \mu_F^{(B)}$? (Per questo punto, e solo per questo, non è richiesta alcuna giustificazione.)

Risposta: Per (a) basta notare che le funzioni date sono monotone crescenti, continue a destra. (La continuità a destra della funzione G in zero deve essere spiegata con cura ma questo è un esercizietto molto facile. Per la monotonia di F si calcoli la derivata. Analogamente per la monotonia di G per la quale però la derivata esiste eccetto in zero.)

Per il punto (b) si vedano le note on-line delle esercitazioni ove un esercizio simillimo è riportato. Infine $\mu_G^{(B)} - \mu_F^{(B)} = \delta_0$ (delta di Dirac concentrata in zero).